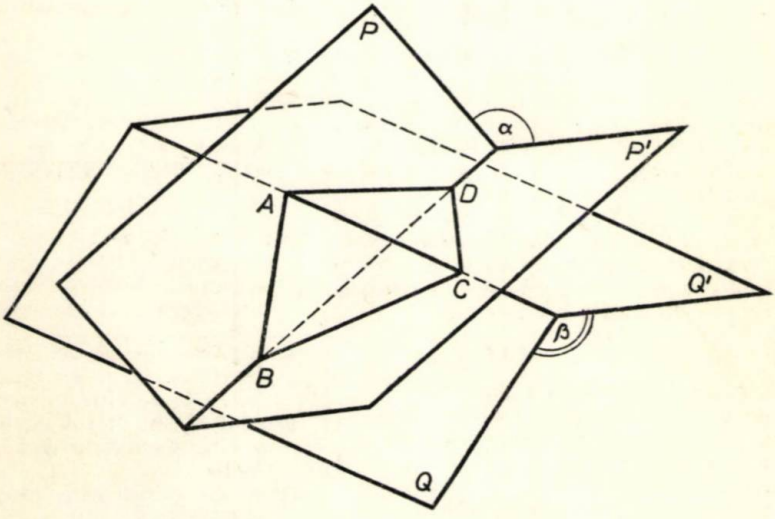
A6.

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

388/93



1

1986. február * XXXIII. évfolyam szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

86-465 — Szegedi Nyomda — F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését, *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

TARTALOM

Előd Istvánné: Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül? 1
Kasza János: Általános iskolai matematikai problémák megoldása PTK—1050 típusú zsebszámológéppel 2
Bereznai Gyula: Megjegyzések a másodfokú egyenlet gyökeinek diszkussziójához ... 12
Lénárt István: Axiomatizálás a gömbfelületen II. 14
Juhász Tibor: Játsszunk számítógépet! 19

KÖNYVISMERTETÉS

Hugo Steinhaus: Matematikai kaleidoszkóp 21
Török Judit: A Fibonacci-sorozat 22
FELADATOK 24
Dr. Berényi Zsuzsanna Ágnes: „INTERKIBERNETIK '85" Nemzetközi Kibernetikai Kongresszus 31

СОДЕРЖАНИЕ

Элёд Иштванне: Что издано до сих пор из учебных программ, учебников и сопровождающих пособий для начальной и средней школы 1
Каса Янош: Решение математических проблем в общеобразовательной восьмилетней школе при помощи карманной вычислительной машины типа ПТК 1050 2
Березнаи Дюла: Заметки к дискуссии корней уравнения второй степени 12
Ленарт Иштван: Аксиоматизация на сфере II. 14
Юхас Тибор: Поиграем в ЭВМ! 19

РЕЦЕНЗИЯ

Гюго Штеинхаус: Математический калейдоскоп 21
Терек Юдит: Последовательность Фибоначчи 22
ЗАДАЧИ 24
д-р Ьерени Жужанна Агнеш: Международный конгресс по кибернетике «ИНТЕРКИБЕРНЕТИК '85» 31

INHALT

Frau Ilona Előd (geb.: *Bakos*): Was sind aus den neuen Mathematik-Lehrplänen der Grund- und Mittelschulen und aus den zugehörigen Dokumenten bisher erschienen? 1
Kasza, János: Lösung mathematischer Probleme mit der Anwendung des ETR vom Typ PTK—1050 in der Grundschule 2
Bereznai, Gyula: Bemerkungen zur Diskussion der Wurzeln der Gleichung zweiten Grades 12
Lénárt, István: Axiomatisierung auf der Kugelfläche II. 14
Juhász, Tibor: Spielen wir Computer! 19

BUCHBESPRECHUNG

Hugo Steinhaus: Mathematisches Kaleidoskop 21
Frl. Judit Török: Die Folge von Fibonacci 22
AUFGABEN 24
Frl. Dr. Zsuzsanna Ágnes Berényi: Über den Internationalen Kybernetischen Kongreß „INTERKIBERNETIK '85" 31

ELŐD ISTVÁNNE
felelős szerkesztő
Tankönyvkiadó, Budapest

Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül?

A Matematika Tanítása 1981., 1982., 1983., 1984. és 1985. februári számában levő cikkek az 1984. szeptemberig megjelent tantervek és dokumentumok jegyzékét tartalmazzák. Az alábbiakban csak az azóta megjelent új kiadványok jegyzékét közöljük.

1. ÁLTALÁNOS ISKOLA

1.1. Alsó tagozat

1.1.2. *Új tanterv*

Matematika feladatgyűjtemény 4. osztály. Szerkesztette: Dr. Andrásfai Béláné. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. R. sz.: 418. (1985-től.)

1.2. Felső tagozat

1.2.2. *Új tanterv*

Imrecze Zoltánné—Novák Lászlóné—Szerediné Loparits Éva—Sztrókayné Földvári Vera: Kézikönyv a matematika 8. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. R. sz.: 83 048. (1985-től.)

Dr. Hajdu Sándor (szerkesztő): Matematika feladatrendszerek 5. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. R. sz.: 518. (1985-től.)

1.3. Dolgozók általános iskolája

Ábel Lajosné—Kecsedi Imréné—Dr. Révész Józsefné: Matematika 5—6. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. R. sz.: D 502. (1985-től.)

Ábel Lajosné—Kecsedi Imréné—Dr. Révész Józsefné: Matematika feladatlapok 5—6. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. R. sz.: D 502/F. (1985-től.)

Ábel Lajosné—Kecsedi Imréné—Dr. Révész Józsefné: Útmutató a dolgozók általános iskolája 5—6. osztály matematikatanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. R. sz.: 83 105. (1985-től.)

2. KÖZÉPISKOLA (ÉS KÖZÉPFOKÚ ISKOLA)

2.1. Szakmunkásképző iskola

Matematika feladatgyűjtemény (a gépi forgácsoló szakmák). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. R. sz.: 12 512. (1985-től.)

Matematika feladatgyűjtemény (a karosszéria-, géplakatos és szerszámkészítő szakmák). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. R. sz.: 12 515. (1985-től.)

2.2. Szakközépiskola

Gádor Endréné: Tanári kézikönyv. Matematika II—IV. osztály (C variáns). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. R. sz.: 84 109. (1985-től.)

Kóbor Zoltán (alkotó szerkesztő): Programozás II—III. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. R. sz.: 58 117. (1985-től.)

Berencsi István (alkotó szerkesztő): Számítógépek rendszertechnikája III—IV. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. R. sz.: 58 158. (1985-től.)

2.3. **Gimnázium**

Fried Ervin: Algebra. (Speciális matematikatagozatos osztályok számára.) II—IV. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. R. sz.: 13 234/I. (1985-től.)

Simonovits Miklós: Számítástechnika. (Speciális matematikatagozatos osztályok számára.) II—IV. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. R. sz.: 13 234/III. (1985-től.)

Hajnal Imre—dr. Nemetz Tibor—dr. Pintér Lajos: Tanári kézikönyv. Matematika II—IV. osztály Fakultatív tanterv, B változat). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. R. sz.: 84 099. (1985-től.)

3. DOLGOZÓK ISKOLÁJA

3.1. **Szakközépiskola**

3.1.2. *Dolgozók szakközépiskolája*

Kun Péter—Újvári István: Matematika IV. (Esti és levelező tagozat.) 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. R. sz.: D 14 402. (1985-től.)

3.2. **Gimnázium**

Dr. Koller Lászlóné: Matematika IV. (Esti és levelező tagozat.) 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. R. sz.: D 13 402. (1985-től.)

A matematikatanítás MÓDSZERE

KASZA JÁNOS
általános iskolai tanár
Debrecen

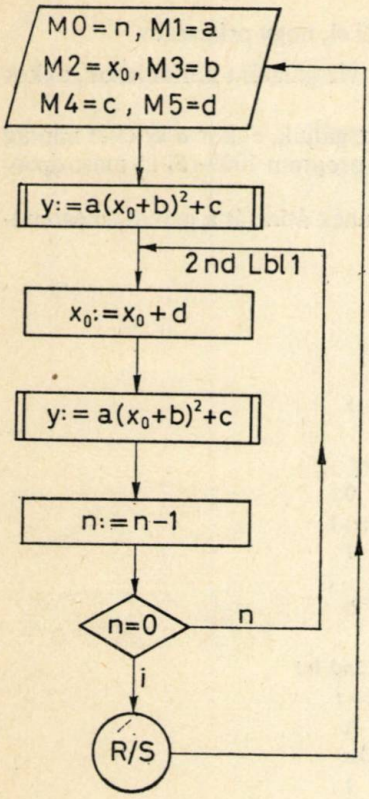
Általános iskolai matematikai problémák megoldása PTK—1050 típusú zsebszámológéppel

Örömmel vettem, hogy mind több cikk jelenik meg a programozható zsebszámológépek általános iskolai hasznosításáról. Iskolánkban e gép segítségével a múlt tanévben vezettük be 7. osztályban a számítástechnikai alapismeretek oktatását fakultáció keretében. A csoport létszáma 11 fő, 10 géppel rendelkezünk, így minden gyerekre maximális gépidő jut.

A gép konstrukciós felépítéséből következően programozása kissé nehézkes, de jól előkészíti a személyi számítógépek programozását. Jól taníthatók a programtervezések egyes fázisai. A gyerekek direkt programokat és egyszerűbb elágazó programokat már könnyedén készítenek. Például: Algebrai kifejezések értékeinek kiszámítása; egyszerű függvények értéktáblázatának elkészítése; geometriai számítások. Több elágazású ciklikus programot önállóan csak a jobb képességű tanulók tudnak készíteni. Nehézséget okoz a gyerekeknek a gép felépítését és a probléma jellegét figyelembe vevő, legcélravezetőbb matematikai eljárás megállapítása.

A gép programozásának korlátai, hogy

csak 8 db memóriával rendelkezik, és 50 pozíciós programtárja van. Ezért egyes problémák megoldásakor a matematikailag felesleges számításokat nehéz kiküszöbölni. Ezek után nézzünk programokat, amelyek közül néhányat irányításommal a gyerekekkel már elkészítettünk!



1. feladat. Készítsünk értéktáblázatot az $x \mapsto a(x+b)^2+c$ másodfokú függvényről az $[x_0, x_0+n\cdot d]$ intervallumban! (x_0:=kezdő változó érték, d:=lépésköz, n:=lépések száma)

	LRN		
00	STO 0	15	RCL 1
01	STO 1	16	x
02	STO 2	17	(
03	STO 3	18	RCL 2
04	STO 4	19	2nd Pause
05	STO 5	20	+
06	SBR 0	21	RCL 3
07	2nd Lbl 1	22	)
08	RCL 5	23	x^2
09	SUM 2	24	+
10	SBR 0	25	RCL 4
11	2nd Dsz	26	=
12	GTO 1	27	2nd Pause
13	R/S	28	INV SBR
14	2nd Lbl 0		LRN

futtatás: RST, n SST, a SST, x_0 SST, b SST, c SST, d R/S.

Az egyes utasításcsoportok jelentései

1.) 00—05. az adatok tárolása történik. Ez megoldható számolási üzemmódban is, amelynek előnye, hogy nem foglalunk el rekeszt a programtárból.
2.) 14—28. alprogram keretében a pillanatnyi függvényérték kiszámítása történik. Itt oldottuk meg a 19—20. utasítással a változó és a függvényérték kijelzését.
3.) 06. és 10. az alprogram behívása.
4.) 07. a ciklus helyének címzése.
5.) 08—09. a változó értékének növelése d-vel.
6.) 11—13. a 0. memória (ciklusszámláló) csökkentése eggyel. Ha a memória tartalma nem zéró, akkor visszatérés az 1-es címre. Zéró esetén ugrás és STOP.

Az alprogram változtatásával tetszőleges függvényről készíthető értéktáblázat.

2. feladat. Készítsünk programot egy x szám prímszám voltának eldöntésére!

A feladat algoritmusa:

a) Kezdő osztó előállítása $d:=[\sqrt{x}]$.

b) Az oszthatóság vizsgálata: ha x és d hányadosának törtrésze nulla, akkor d osztó, különben nem.

c) Ha d osztó, akkor d kijelzése.

d) Ha d nem osztó, akkor $d:=d-1$, majd az oszthatóság újbóli vizsgálata következik.

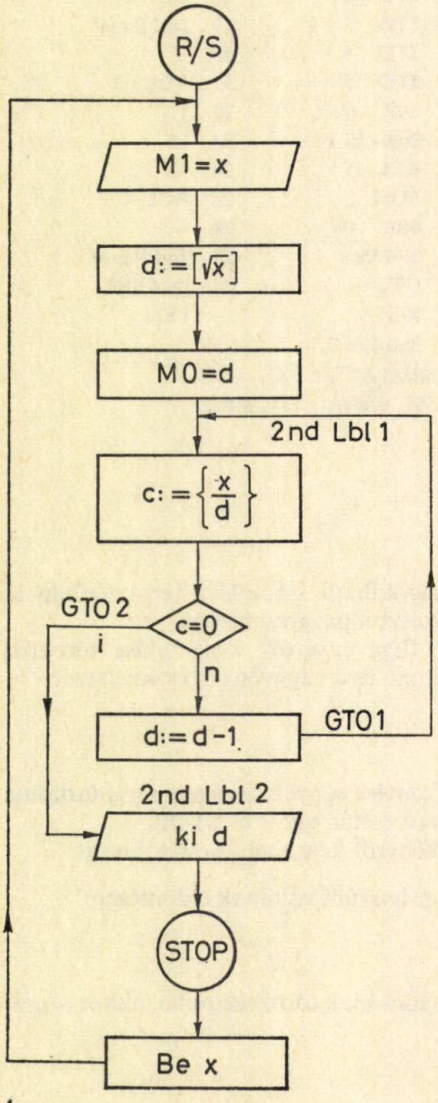
Tehát a géppel megkeressük a $\sqrt{x}$-nél nem nagyobb osztók közül a legnagyobbat. Prímszám esetén ez 1.

A program pl. az 1009-ről 28 másodperc alatt dönti el, hogy prímszám.

Megjegyzés: Ha a feladatot csak páratlan számok vizsgálatára korlátozzuk, akkor a futtatás ideje csökkenthető.

Ugyanis akkor csak a páratlan osztók létezését vizsgáljuk, ekkor d értékét mindig kettővel csökkenthetjük a ciklusban. Ez a módosított program 1009-ről 15 másodperc alatt állapítja meg, hogy prímszám.

Ezek után nézzük a program folyamatábráját és ennek átírását a gép utasításrendszerére!




```
    LRN
00  STO  1
01  √x
02  2nd Int
03  STO  0
04  2nd Lbl 1
05  RCL  1
06  ÷
07  RCL  0
08  =
09  INV  2nd Int
10  2nd x=t
11  GTO  2
12  2nd Dsz
13  GTO  1
14  2nd Lbl 2
15  RCL  0
16  R/S
17  RST
    LRN
```

futtatás: RST, x, R/S.

3. feladat. Határozzuk meg egy tetszőleges pozitív egész szám prímtényezős felbontását!

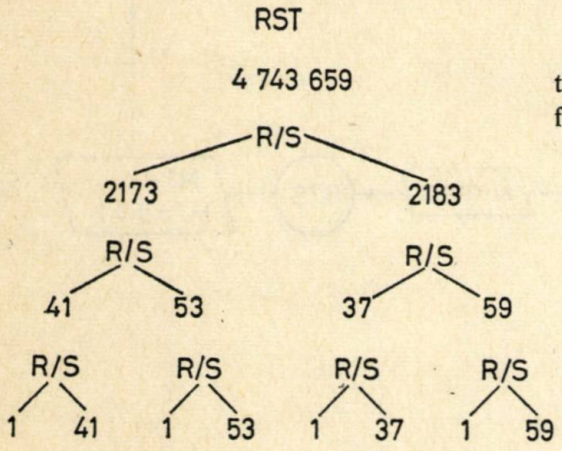
A feladat megoldható az előző megoldás kis változtatásával.

1) A 8. utasítás után STO 2-vel tároljuk a hányadost.

2) A 15. után 2nd Pause és RCL 2-vel a hányadost is kiíratjuk.

A program futtatása részben kézi vezérlésű.

Nézzük a futtatást egy konkrét példán keresztül:



tehát $4\,743\,659 = 37 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 59$,
futtatási idő: 1 perc 20 másodperc.

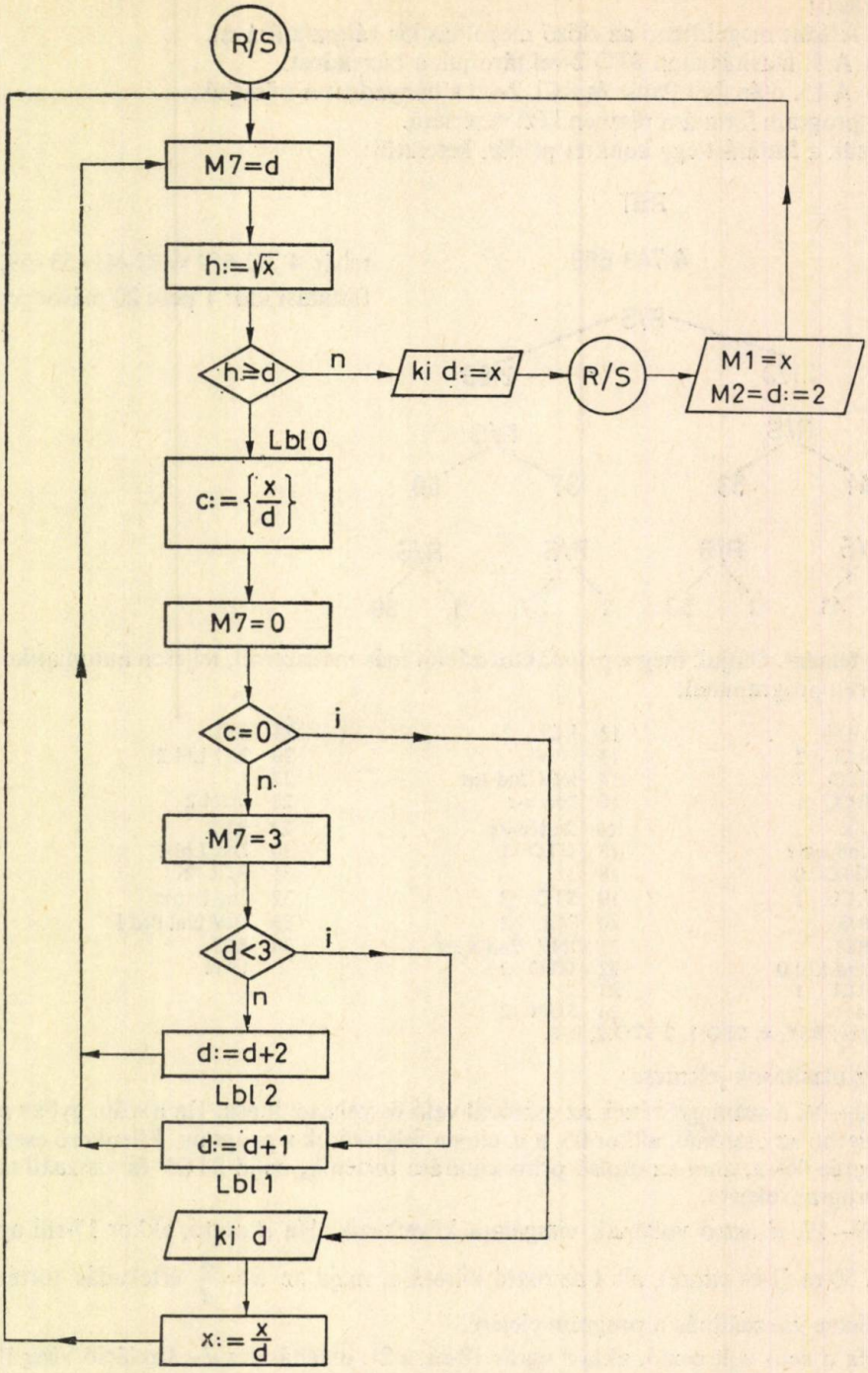
4. feladat. Oldjuk meg a prímfaktorizációt más módszerrel, teljesen automatikusan vezérelt programmal!

```
    LRN
00  RCL  2
01  STO  7
02  RCL  1
03  √x
04  2nd x≧t
05  GTO  0
06  RCL  1
07  R/S
08  RST
09  2nd Lbl 0
10  RCL  1
11  ÷
12  RCL  2
13    =
14  INV 2nd Int
15  2nd c·t
16  2nd x=t
17  GTO  1
18  3
19  STO  2
20  RCL  2
21  INV  2nd x≧t
22  GTO  2
23  2
24  SUM  2
25  RST
26  2nd Lbl 2
27  1
28  SUM 2
29  RST
30  2nd Lbl 1
31  RCL 2
32  2nd Pause
33  INV 2nd Prd 1
34  RST
    LRN
```

futtatás: RST, x, STO 1, 2 STO 2, R/S.

Az utasítások jelentése:

1. 00—04. a szám gyökének az osztóval való összehasonlítása. Ha a szám gyöke nem kisebb az osztónál, akkor 05, a 0. címen folytatódik a program. Ellenkező esetben ugrás 06-ra, ahol az utolsó prím kiíratása történik, majd STOP és visszaállítás a program elejére.
2. 09—17. d osztó voltának vizsgálata következik. Ha d osztó, akkor 17-ről ugrás a 30-ra (1-es címre), ahol az osztó kiíratása, majd az $x := \frac{x}{d}$ értékadás történik, illetve visszaállítás a program elejére.
3. Ha d nem volt osztó, akkor ugrás 18-ra, a 21. utasításig a $d<3$ reláció vizsgálata következik. Ha igaz, akkor a 22. utasítással ugrás 26-ra (2-es címre), ahol d-t eggyel


R/S
M7=d
h:=√x
h≥d
n
ki d:=x
R/S
M1=x
M2=d:=2
Lbl 0
c:={x/d}
M7=0
c=0
j
n
M7=3
d<3
j
n
d:=d+2
Lbl 2
d:=d+1
Lbl 1
ki d
x:=x/d

növeljük, ellenkező esetben a 23. utasítástól folytatódik, amelytől d-t 2-vel növeljük. Ezek után 25-tel és 29-cel az oszthatóság újabb vizsgálata következik.

Megjegyzés: A program kiválogatja ugyan a prímszámokat, de van egy hibája. Ugyanis, ha pl. p_1 és p_2 1-szeres multiplicitású osztók, és $\sqrt{x} \geqq p_1 \cdot p_2$, akkor a program megvizsgálja a $p_1 \cdot p_2$-vel való oszthatóságot, pedig $x := \frac{x}{p_1 \cdot p_2}$-nek nem lehet osztója a $p_1 \cdot p_2$.

A feladatot megoldottam prímelőállítással is, de időben nem gyorsabb. Itt jelentkeztek a gép használatának korlátai. Ezzel a programmal az előző feladatban vizsgált számnak 1 perc alatt határozta meg prímtényezős felbontását.

5. feladat. Határozzuk meg egy x pozitív egész szám osztóit!

Megoldás: A 2. feladatban felhasznált matematikai módszert alkalmazzuk. Meghatározzuk a $\sqrt{x}$-nél nem nagyobb osztók közül a legnagyobbat (d_j-t), valamint az ennél kisebb osztókat. Ha $d_0 = 1$, akkor megállítjuk a programot. Az osztókat az $\frac{x}{d_j}$ hányadosokkal együtt kiíratjuk. Tegyük fel, hogy $d_0 < d_1 < \ldots < d_j$; $d_j \leqq [\sqrt{x}]$ az x osztói!

Ekkor a kijelzőn megjelenő értékek:

d_j szünet $\frac{x}{d_j}$

d_{j-1} szünet $\frac{x}{d_{j-1}}$

$\vdots$ $\vdots$

d_1 szünet $\frac{x}{d_1}$

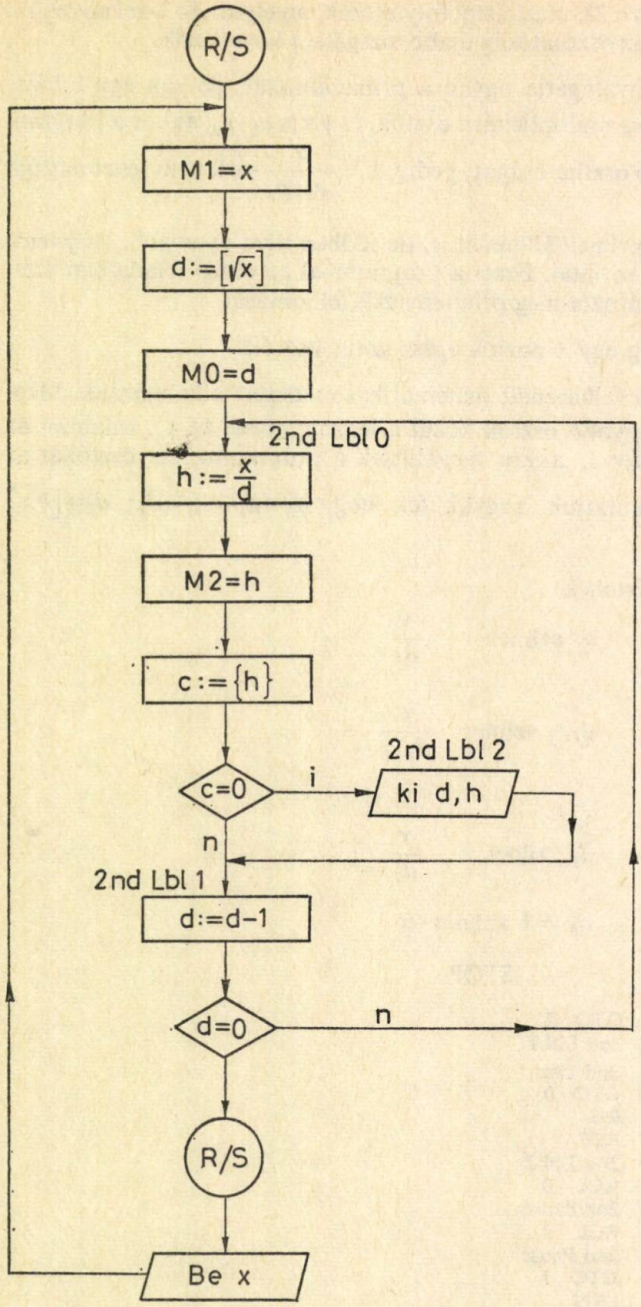
$d_0 = 1$ szünet x

STOP

```
     LRN
00 STO  1
01 √x
02 2nd Int
03 STO  0
04 2nd Lbl 0
05 RCL  1
06 ÷
07 RCL  0
08 =
09 STO  2
10 INV 2nd Int
11 2nd x=t
12 GTO  2
13 2nd Lbl 1
14 2nd Dsz
15 GTO  0
16 R/S
17 RST
18 2nd Lbl 2
19 RCL  0
20 2nd Pause
21 RCL  2
22 2nd Pause
23 GTO  1
     LRN
```

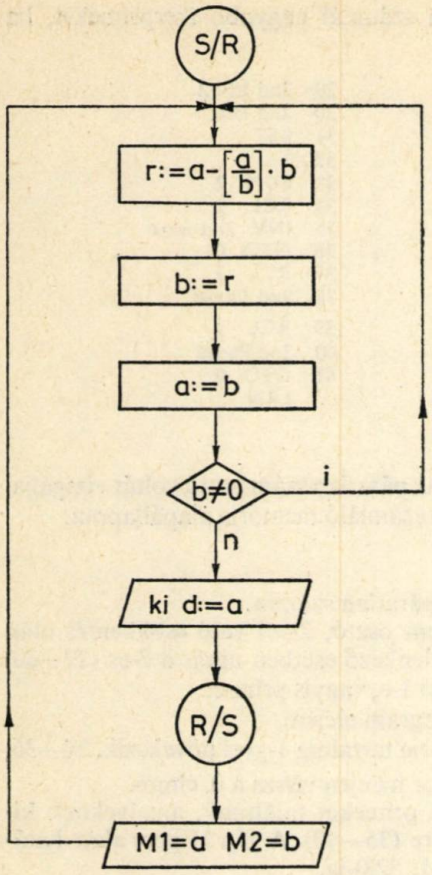
A STOP utasítás után érdemes RST utasítással a gépet visszaküldetni a program elejére. Így a második futtatásnál ez a lépés már kimaradhat.

1. futtatás: RST, x, R/S.
2. futtatás: új x érték, R/S.



6. feladat. Határozzuk meg két pozitív egész szám (*a* és *b*) legnagyobb közös osztóját, ha $a>b$.

A feladatra két megoldást mutatok be, amelyek az euklideszi algoritmusra épülnek, csak a maradék meghatározásában lesz különbség.



program elejére, ellenkező esetben d kiíratása és STOP.

A feladat másik megoldásának érdekessége, hogy egymásba skatulyázott ciklusokat tartalmaz.

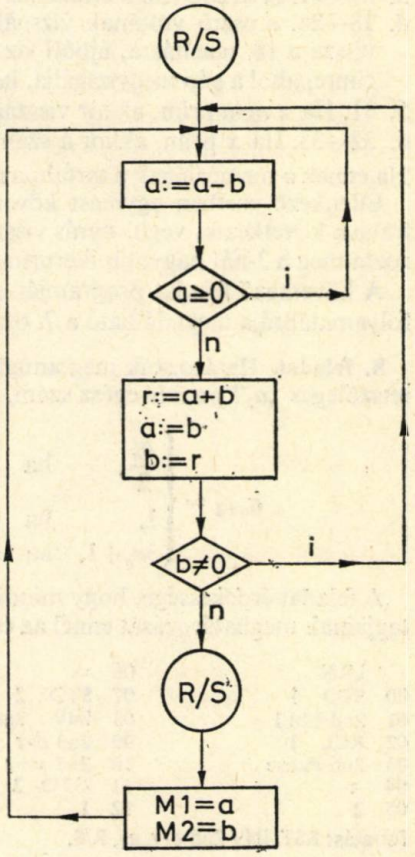
A maradékot ismételt kivonással határozzuk meg. Tegyük fel, hogy $a-k\cdot b\geqq 0$, de $a-(k+1)b<0$, ekkor $r=a-(k+1)b+$ $+b=a-k\cdot b$. Ennek végrehajtása lesz programunkban a másik ciklus!

```
    LRN
00  RCL  2
01  INV SUM 1
02  RCL  1
03  2nd x≧t
04  RST
05  2nd Exc 2
06  STO 1
07  SUM  2
08  RCL  2
09  INV 2nd x=t
10  RST
11  RCL  1
12  R/S
13  RST
    LRN
```

```
    LRN
00  RCL  1
01  ÷
02  RCL  2
03  =
04  2nd Int
05  x
06  RCL  2
07  =
08  INV SUM 1
09  RCL  1
10  2nd Exc 2
11  STO  1
12  RCL  2
13  INV 2nd x=t
14  RST
15  RCL  1
16  R/S
17  RST
    LRN
```

futtatás: RST, a STO 1, b STO 2, R/S.

1. 00—08. M 1-ben meghatározzuk az euklideszi osztás maradékát.
2. 09—10. M 1 tartalma „r" a kijelzőn cserélődik M 2-évei „b"-vel. Ezzel végrehajtottuk a $b:=r$ értékadó utasítást.
3. A kijelző tartalmát „b"-t beírjuk M 1-be, $a:=b$.
4. 12—17. A ciklusfelvétel vizsgálata történik: igaz állítás esetén visszaállítás a



7. feladat. Határozzuk meg egy x páratlan számnál nagyobb ikerprímeket, ha $x \geqq 3$. Ábra a következő oldalon!

```
    LRN
00  2
01  +/−
02  STO  2
03  2nd Lbl 0
04  RCL  1
05  STO  3
06  2
07  SUM  1
08  RCL  1
09  √x
10  2nd Int
11  STO  0
12  ÷
13  2
14  =
15  INV 2nd Int
16  2nd x=t
17  2nd Dsz
18  2nd Lbl 1
19  RCL  1
20  ÷
21  RCL  0
22  =
23  INV  2nd Int
24  2nd x=t
25  GTO  2
26  2
27  INV SUM 0
28  GTO  1
29  2nd Lbl 2
30  2nd Dsz
31  RST
32  1
33  SUM  2
34  RCL  2
35  INV  2nd x=t
36  GTO  0
37  RCL  3
38  2nd Pause
39  RCL  1
40  2nd Pause
41  GTO  0
    LRN
```

futtatás: RST, x, STO 1.

A feladat megoldása a 2. feladatéra épül. Csak páratlan szám osztó voltát vizsgálja.

1. 00—02. Az egymás után következő prímeket számláló memória alapállapota.
2. 04—05. x tárolása másik memóriában.
   06—07. x értékének 2-vel való növelése.
3. 09—17. A kezdő osztó értékének beállítása páratlan számra.
4. 18—28. d osztó voltának vizsgálata: ha nem osztó, 2-vel való csökkentés után vissza a 18. utasításra, újbóli vizsgálatra. Ellenkező esetben ugrás a 2-es (29—30) címre, ahol a gép megvizsgálja, hogy az osztó 1-e, vagyis prím-e.
5. 31. Ha x nem prím, akkor visszaállítás a program elejére.
6. 32—33. Ha x prím, akkor a számláló memória tartalma 1-gyel növekszik. 34—36. Ha ennek a memóriának a tartalma nem 0, akkor menjen vissza a 0. címre.

Ellenkező esetben egymást követő páratlan prímeket találtunk, amelyeknek kiíratása következik, végül ugrás vissza a 0. címre (35—40). A gép 31 perc alatt határozta meg a 3-nál nagyobb ikerprímeket az (521, 523)-ig.

A következő feladat programját egy tanuló teljesen önállóan készítette. A feladat folyamatábrája megtalálható a 7. osztályos tankönyv 144. oldalán.

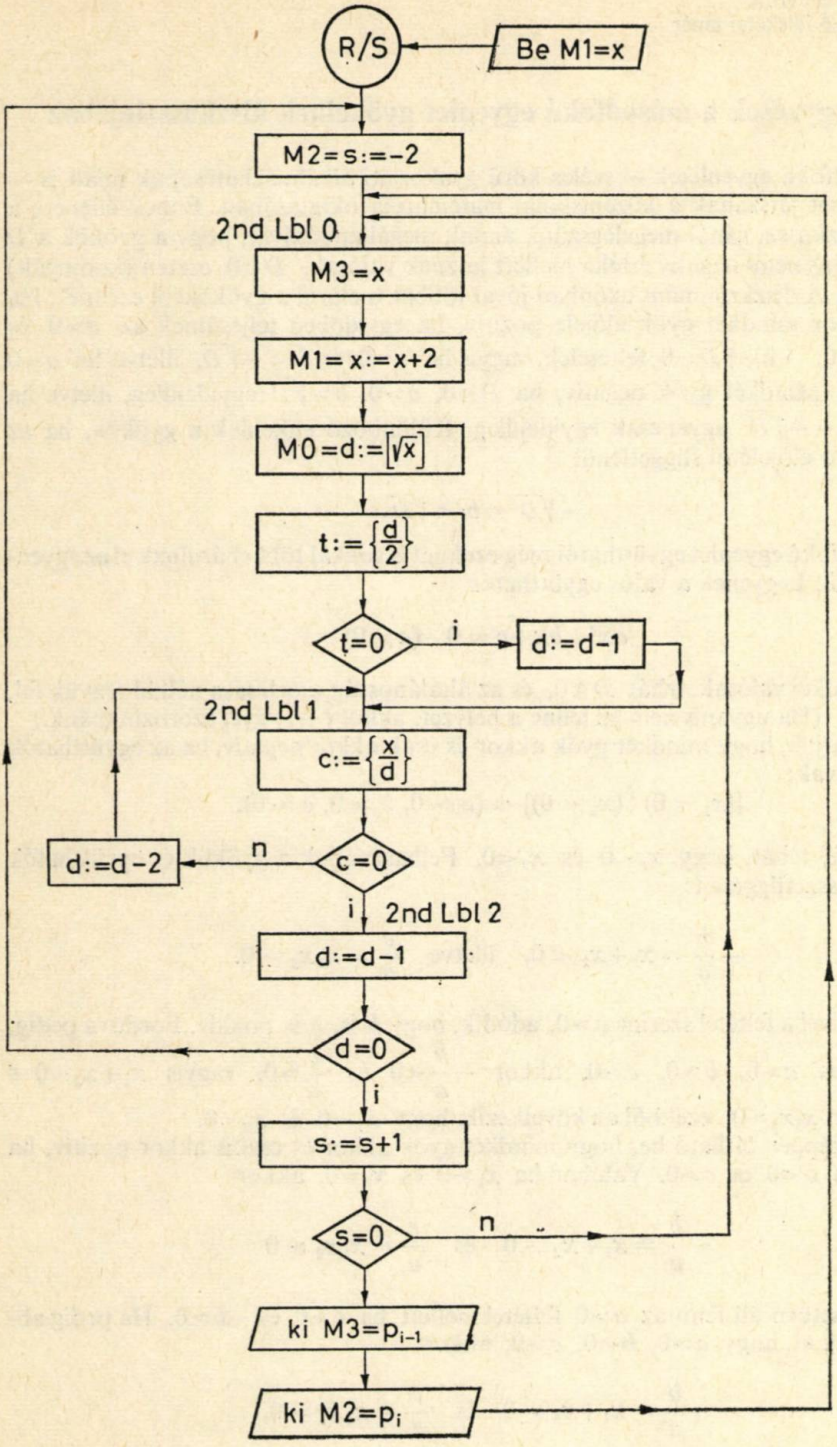
8. feladat. Határozzuk meg annak a sorozatnak az elemeit, amelynek első tagja tetszőleges „a_1" pozitív egész szám, ezt követő elemei:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2}, & \text{ha } a_n = 2k \\ 1, & \text{ha } a_n = 1 \\ 3a_n+1, & \text{ha } a_n = 2k+1: \ k \text{ pozitív egész szám.} \end{cases}$$

A feladat érdekessége, hogy mindig létezik olyan n érték, amelyre $a_n = 1$. A sorozat tagjainak meghatározását ennél az értéknél fejezzük be.

```
    LRN
00  STO  1
01  2nd Lbl 1
02  RCL  1
03  2nd Pause
04  ÷
05  2
06  =
07  STO  2
08  INV  2nd Int
09  2nd c·t
10  2nd x=t
11  GTO  2
12  1
13  STO  7
14  RCL  1
15  2nd x=t
16  R/S
17  3
18  2nd Prd 1
19  1
20  SUM  1
21  GTO  1
22  2nd Lbl 2
23  RCL  2
24  STO  1
25  GTO  1
    LRN
```

futtatás: RST, INV 2nd $c \cdot t$, a_1, R/S.


R/S
Be M1=x
M2=s:=-2
2nd Lbl 0
M3=x
M1=x:=x+2
M0=d:=[√x]
t:={d/2}
t=0
i
d:=d-1
2nd Lbl 1
c:={x/d}
c=0
n
d:=d-2
i
2nd Lbl 2
d:=d-1
d=0
i
s:=s+1
s=0
n
ki M3=p_{i-1}
ki M2=p_i

BEREZNAI GYULA
ny. tanárképző főiskolai tanár
Nyíregyháza

Megjegyzések a másodfokú egyenlet gyökeinek diszkussziójához

A másodfokú egyenletek — széles körű gyakorlati alkalmazhatóságuk miatt is — nagy szerepet játszanak a középiskolai matematika oktatásában. Ennek ellenére a gyökök diszkussziójánál megelégszünk annak megállapításával, hogy a gyökök a D diszkrimináns nem-negatív értéke mellett lesznek valósak, $D<0$ esetén (konjugált) komplexek. A diszkrimináns azonban jóval többet is elárul a gyökökről ezeknél: Ha $D\geqq 0$, akkor mindkét gyök előjele pozitív, ha egyidőben teljesülnek az $a>0$ és $-b+\sqrt{D}>0$, $-b-\sqrt{D}>0$ feltételek, vagyis ha $a>0$ és $b<-\sqrt{D}$, illetve ha $a<0$ és $b>\sqrt{D}$. Mindkét gyök negatív, ha $D\geqq 0$, $a>0$, $b>\sqrt{D}$ egyidejűleg, illetve ha $a<0$ és $b<-\sqrt{D}$ ugyancsak egyidejűleg. Különböző előjelűek a gyökök, ha az a együttható előjelétől függetlenül

$$-\sqrt{D}<b<\sqrt{D}.$$

A másodfokú egyenlet együtthatói még ezeknél is sokkal többet árulnak el az egyenlet gyökeiről. Legyenek a valós együtthatós

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

egyenlet gyökei valósak, tehát $D\geqq 0$, és az általánosság csorbítása nélkül tegyük fel, hogy $a>0$. (Ha ugyanis nem ez lenne a helyzet, akkor (-1)-gyel szorozhatnánk.)

Megmutatjuk, hogy mindkét gyök akkor és csak akkor negatív, ha az együtthatók mind pozitívak:

$$[(x_1<0)\wedge(x_2<0)]\Leftrightarrow(a>0,\ b>0,\ c>0).$$

Tegyük fel tehát, hogy $x_1<0$ és $x_2<0$. Felhasználjuk a gyökök és együtthatók jól ismert összefüggéseit:

$$-\frac{b}{a}=x_1+x_2<0, \quad \text{illetve} \quad \frac{c}{a}=x_1x_2>0.$$

Ezekből, mivel a feltétel szerint $a>0$, adódik, hogy b is, c is pozitív. Fordítva pedig, minthogy ha $a>0$, $b>0$, $c>0$, akkor $-\frac{b}{a}<0$ és $\frac{c}{a}>0$, vagyis $x_1+x_2<0$ s ugyanakkor $x_1x_2>0$, ezekből az következik, hogy $x_1<0$ és $x_2<0$.

Hasonlóképpen látható be, hogy mindkét gyök akkor és csakis akkor pozitív, ha $a>0$ esetén $b<0$ és $c>0$. Valóban ha $x_1>0$ és $x_2>0$, akkor

$$-\frac{b}{a}=x_1+x_2>0 \quad \text{és} \quad \frac{c}{a}=x_1x_2>0$$

abban az esetben áll fenn az $a>0$ feltétel mellett, ha $c>0$ és $-b>0$. Ha pedig abból indulunk ki, hogy $a>0$, $b<0$, $c>0$, akkor

$$-\frac{b}{a}=x_1+x_2>0 \quad \text{és} \quad \frac{c}{a}=x_1x_2>0,$$

amikből $x_1>0$ és $x_2>0$ következik. Tehát valóban:

$$[(x_1>0)\wedge(x_2>0)] \Leftrightarrow (a>0,\ b<0,\ c>0).$$

A logikailag lehetséges harmadik eset: amikor a gyökök ellenkező előjelűek, ezek után nyilvánvalóan a következő:

$$[(x_1<0)\wedge(x_2>0)] \Leftrightarrow [(a>0,\ b>0,\ c<0)\vee(a>0,\ b<0,\ c<0)].$$

Összegezve eredményeinket azt kapjuk, hogy az együtthatók lehetséges

1) $+++$; 2) $+-+$; 3) $++-$; 4) $+--$

előjelmegoszlásának a gyökök

1) $--$; 2) $++$; 3) $-+$; 4) $+-$

előjelmegoszlása felel meg, ahol a 3) és 4) eset megkülönböztetése semmiféle különbségtételt sem jelent a gyökök között.

Tárgyalásainkban nem volt véletlen a szigorú egyenlőtlenség alkalmazása; ha ugyanis $c=0$, akkor

$$ax^2+bx = x(ax+b) = 0$$

szerint az egyenlet egyik gyöke zérus.

Eredményünk speciális, a másodfokú egyenletre redukált esete a sokkal általánosabb Descartes-féle jelszabálynak, amely szerint egy olyan algebrai egyenletnél, melynek csupa valós gyöke van, a pozitív gyökök száma megegyezik az együtthatók előjelváltásának számával.

Az egyenlőtlenségek, egyenlőtlenség-rendszerek megoldásának gyakoroltatását motiválhatja az

$$A(\lambda)x^2+B(\lambda)x+C(\lambda) = 0$$

típusú másodfokú egyenletek gyökeinek diszkussziója, ahol A, B, C valós változós valós függvények.

Az eddigi eredmények lehetővé teszik a másodfokú egyenlet gyökeinek nagyságrendjével kapcsolatos néhány kérdés megválaszolását is.

Vizsgáljuk meg először annak feltételeit, hogy az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet ($a>0$) mindkét gyöke kisebb legyen, mint egy adott K valós szám! E célból végezzük el a következő transzformációt:

$$x = z+K.$$

$$a(z+K)^2+b(z+K)+c = 0, \quad \text{azaz} \quad az^2+(2aK+b)z+(aK^2+bK+c) = 0.$$

Ez utóbbi egyenlet diszkriminánsa:

$$\Delta = (2aK+b)^2-4a(aK^2+bK+c) = 4a^2K^2+4aKb+b^2-4a^2K^2-$$

$$-4abK-4ac = b^2-4ac = D,$$

tehát ugyanannyi, mint az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek, ami azt jelenti, hogy ha ez utóbbinak valós gyökei vannak, akkor az $az^2+(2aK+b)z+(aK^2+bK+c)=0$ egyenlet gyökei is valósak. Ennek az egyenletnek pedig, mint láttuk, mindkét gyöke akkor és csakis akkor negatív, ha együtthatói mind pozitívak, azaz ha ($a>0$ feltétel mellett) $2aK+b>0$ és $aK^2+bK+c>0$. Ilyen feltételek mellett tehát $z_1<0$ és $z_2<0$.

Összegezve: Az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet ($a>0$, $c\neq 0$) — amelynek gyökei valósak — mindkét gyöke akkor és csak akkor, kisebb, mint egy adott valós K szám, ha $2aK+b>0$ és ugyanakkor $aK^2+bK+c>0$.

Hasonló utat járva megadhatjuk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az egyenlet mindkét gyöke nagyobb legyen valamely valós k-nál. Ehhez az kell, hogy a transzformált egyenlet z_1 és z_2 gyökei pozitívak legyenek, s ebből azt kapjuk, hogy a keresett feltétel az, hogy egyszerre teljesüljenek a

$$2ak+b<0 \quad \text{és} \quad ak^2+bk+c>0$$

feltételek.

Végül azt a feltételt szabva, hogy az egyenlet egyik gyöke kisebb, a másik nagyobb legyen valamely valós K számnál, a transzformált egyenlet $z_1=x_1-K$ és $z_2=x_2-K$ gyökei egyikének pozitívnak, másikának negatívnak kell lennie. Ez a feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha $2aK+b>0$ és $aK^2+bK+c<0$, vagy ha $2aK+b<0$ és ugyanakkor $aK^2+bK+c<0$. A K szám tehát elválasztja a gyököket, ha $aK^2+bK+c<0$.

Ezekből az eredményekből kiindulva már csak gyakorlatnak számít annak megállapítása, mi a feltétele, hogy egy másodfokú egyenlet gyökei egy $(k; K)$ intervallumba essenek, illetve hogy az egyenlet gyökei közrefogják a k, K számokat, vagyis hogy teljesüljön a

$$[k; K] \subset (x_1; x_2)$$

reláció.

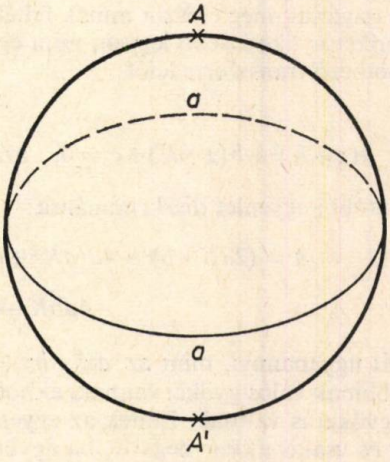
LÉNÁRT ISTVÁN
laboráns
Budapest

Axiomatizálás a gömbfelületen II.

15. Röviden összefoglalom az első rész (A Matematika Tanítása 1983. 5. számában) legfontosabb lépéseit:

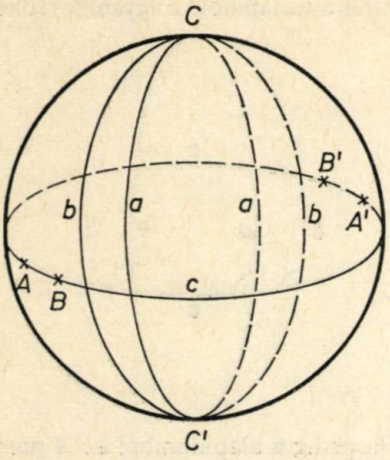
A gömbfelület tetszőleges, rögzített pontja egyértelműen meghatározza a vele átellenes gömbi pontot is, és a hozzá tartozó egyenlítői főkört is — gondoljunk a földgömbön az Északi-sark, Déli-sark és Egyenlítő összetartozására. Megpróbáltunk ezért olyan gömbi geometriát felépíteni, ahol a kiindulásul választott elem nem a pont, nem is a főkör, hanem az az *alapidom*, amely egy pontból, a ponttal átellenes másik pontból és a hozzájuk tartozó egyenlítői főkörből áll.

Jelölése: $\mathbf{a}(A, A', a)$, ahol **a** maga az alapidom, A, A' az átellenes pontpár, és a az egyenlítői főkör.



Két különböző ilyen alapidom egyértelműen meghatároz egy harmadik alapidomot úgy, hogy az első két alapidom négy sarkpontján a harmadik alapidom egyenlítői főköre megy át, és az első két alapidom egyenlítői főkörei a

harmadik alapidom két sarkpontjában metszik egymást:



Így a gömbi alapidomok halmazában értelmeztünk egy *bináris műveletet*, amely a halmaz akármelyik két különböző eleméhez hozzárendel egy harmadik elemet — ugyanebből a halmazból. Ezt a műveletet így jelöltük: $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{c}$ (szóban: á bumm bé egyenlő cé). A gömbi geometria segítségével megvizsgáltuk néhány tulajdonságát, és ezek közül kiemeltük a következő hármat:

I) $\mathbf{a} \sim \mathbf{a}$ értelmezetlen (mint a 0-val történő osztás a valós számok között);

II) $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{b} \sim \mathbf{a}$ (kommutativitás);

III) $(\mathbf{a} \sim \mathbf{b}) \sim (\mathbf{a} \sim \mathbf{c}) = \mathbf{a}$.

Ebből a három tulajdonságból már levezettük a következőt:

IV) Ha **a**, **b**, **c** mind mások, és ha teljesül rájuk az $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{a} \sim \mathbf{c}$ egyenlőség, — akkor ebből *nem* a megszokott $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ következik (azaz, itt nem lehet **a**-val egyszerűsíteni), hanem az $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{a} \sim \mathbf{c} = \mathbf{b} \sim \mathbf{c}$ egyenlőségek érvényesek!

Mert: Tegyük fel, hogy $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{a} \sim \mathbf{c}$, de (indirekt bizonyítás!) $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \sim \mathbf{c}$; akkor, persze, $\mathbf{a} \sim \mathbf{c} \neq \mathbf{b} \sim \mathbf{c}$ is igaz. Ezért tehát az I. tulajdonság nem akadályozza meg, hogy az $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{a} \sim \mathbf{c}$ egyenlőség mindkét oldalát megszorozzuk $\mathbf{b} \sim \mathbf{c}$-vel: $(\mathbf{a} \sim \mathbf{b}) \sim (\mathbf{b} \sim \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \sim \mathbf{c}) \sim (\mathbf{b} \sim \mathbf{c})$. Ebből viszont, a III. tulajdonság alapján, $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ következik, — ami ellentmond annak a kiindulási feltételnek, hogy **a**, **b**, **c** mind mások. Ezt az ellentmondást csak úgy kerülhetem ki, hogy a beszorzás, éppen az I. tulajdonság miatt, *végrehajthatatlan*, mert: $\mathbf{a} \sim \sim \mathbf{b} = \mathbf{b} \sim \mathbf{c}$; és akkor, persze, $\mathbf{a} \sim \mathbf{c} = = \mathbf{b} \sim \mathbf{c}$ is igaz.

Mindezek alapján: Ha egy halmazban értelmezni tudtunk olyan bináris műveletet, amelyre az I., II., III. tulajdonságok érvényesek, akkor ezt a halmazt, erre a bináris műveletre nézve, *egyféle alapelemre épülő projektív síknak* vagy röviden *projektív síknak* neveztük. Láttuk, hogy a gömbi alapidomok között értelmezett műveleten kívül másféle halmazok és műveletek is kielégítik ezeket a követelményeinket.

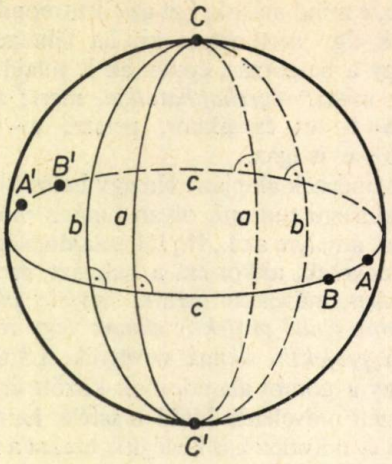
Művelettáblák segítségével a következő két, véges (vagyis véges sok elemből álló) projektív síkot adtuk meg:

	p	q	r
p	–	r	q
q	r	–	p
r	q	p	–

	0	1	2	3	4	5	6
0	–	0	1	0	3	3	1
1	0	–	6	0	6	2	2
2	1	6	–	5	6	5	1
3	0	0	5	–	4	5	4
4	3	6	6	4	–	3	4
5	3	2	5	5	3	–	2
6	1	2	1	4	4	2	–

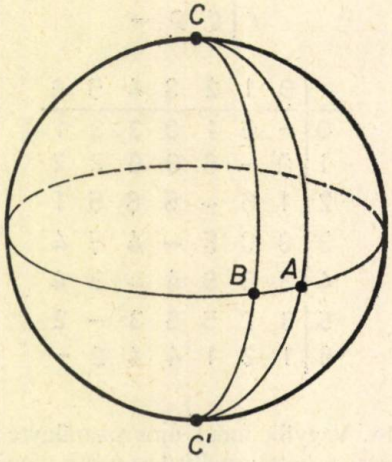
16. Vegyük most újra szemügyre azt a szerkesztést, amellyel az **a** és **b** alapidomokból a **c** alapidomot származtathatjuk (ábra a következő oldalon):

Ha az $\mathbf{a}(A, A', a)$ alapidom és a $\mathbf{b}(B, B', b)$ alapidom egy-egy alkotórészét már ismerjük, akkor az $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ művelet eredményének, a $\mathbf{c}(C, C', c)$ alapidomnak akármelyik alkotórészét megszerkeszthetjük.



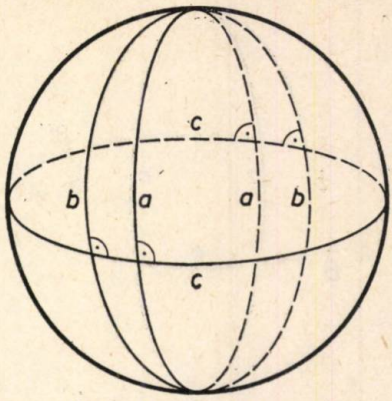
Itt „⊾" a merőlegességet jelöli.

Ha **a** alapidomból az *A* pontot, **b** alapidomból a *B* pontot vesszük, akkor az *AB* főkör lesz a **c** alapidom *c* egyenlítői főköre. De meghatározhatom azt a *C*, *C'* átellenes pontpárt is, amelynek a pontjai *A* ponttól is, *B* ponttól is pontosan negyedfőkörívnyire fekszenek:

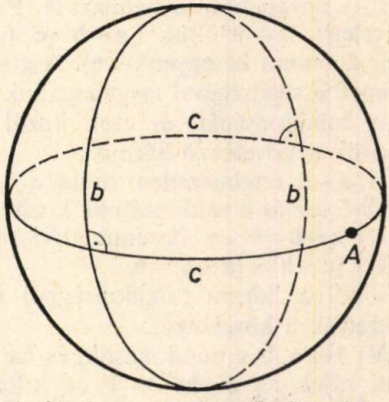


$\widehat{AC}=\widehat{AC'}=\widehat{BC}=\widehat{BC'}=$
= negyedfőkörív

Ha **a** alapidomból az *a* főkört, **b** alapidomból a *b* főkört vesszük, akkor ennek a két főkörnek a két metszéspontja éppen a **c** alapidom *C*, *C'* sarkpont-párja lesz. De meghatározhatom azt az *egyetlen* főkört is, amely az **a** főkörre is, a **b** főkörre is merőleges — ez a közös merőleges főkör lesz a **c** alapidom *c* egyenlítői főköre:



Ha pedig **a** alapidomból az *A* pontot, **b** alapidomból a *b* főkört vesszük, akkor az *A* pontból a *b* főkörre húzott merőleges főkör lesz a **c** alapidom *c* egyenlítői főköre:

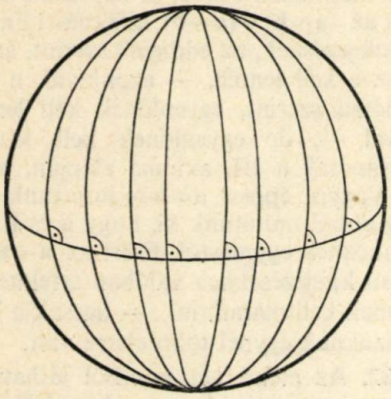


Mindezek a szerkesztések tehát az **a**∼**b**=**c** algebrai megfogalmazás különféle geometriai formáit jelentik.

17. Ebből következik, hogy a művelet eddig talált tulajdonságait mindegyik geometriai szerkesztésnek tükröznie kell.

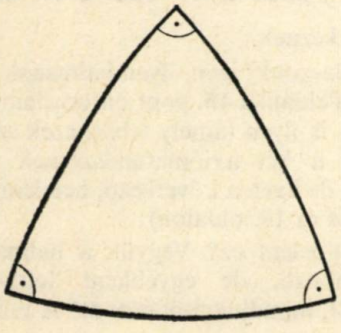
Vegyük az I., „**a**∼**a** értelmezetlen"-tulajdonságot: Két főkör a gömbön meghatároz egyetlen közös merőleges főkört — de *egyetlen* főkörre már nemcsak *egy* merőleges főkört húzhatunk. Vagy: adott pontból adott főkörre általában csak egy merőleges főkört húzhatunk, — de ha a pont éppen az adott főkör egyik sark-

pontja (tehát a pont és a főkör ugyanahhoz az alapidomhoz tartoznak), akkor a ponton átmenő *akármelyik* főkör merőleges lesz az adott főkörre:

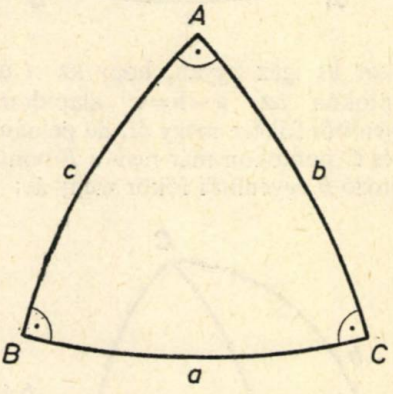


18. Másik példa: a IV. tulajdonság: Ha három különböző alapidom, **a**, **b**, **c** kielégíti az $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{a} \sim \mathbf{c} = \mathbf{b} \sim \mathbf{c}$ egyenlőségeket, akkor ezt az alapidomokból kiemelt tetszőleges alkotórészekből is kiolvashatjuk. „Az *A*, *B*, *C* pontok ugyanarra a főkörre illeszkednek", — „az *a*, *b*, *c* főkörök ugyanazon az átellenes pontpáron mennek át", — „az *a*, *b*, *c* főkörök ugyanarra a főkörre merőlegesek", — „az *A* ponton átmenő főkör merőleges a *b* és *c* főkörökre", — vagy: „az *A* és *B* pontokon átmenő főkör merőleges a *c* főkörre" mind az $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{a} \sim \mathbf{c} = \mathbf{b} \sim \mathbf{c}$ algebrai megfogalmazás különféle geometriai képeit jelentik.

19. Mindannak érzékeltetésére, amit elmondtunk: vegyünk fel egy tetszőleges gömbi pontot, *A*-t, és egy, az *A* ponton átmenő *b* főkört! Állítsunk *b* főkörre merőleges főkört az *A* pontban, és vegyük fel az *A* ponthoz tartozó *a* egyenlítői főkört! Egy egyenlő oldalú gömbháromszöghöz jutottunk, amelynek mind a három belső szöge derékszög.

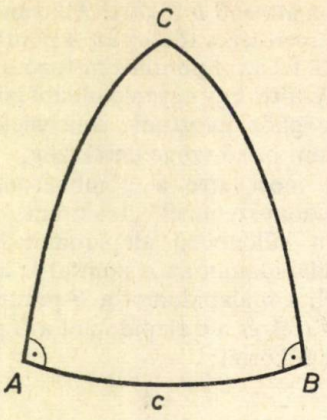


Ha most erre a gömbháromszögre „alapidom-szemmel" tekintünk, akkor három különböző alapidomot látunk: az **a** alapidomot az *A* ponttal és az *a* főkörrel, a **b** alapidomot a *B* ponttal és a *b* főkörrel, és a **c** alapidomot a *C* ponttal és a *c* főkörrel:

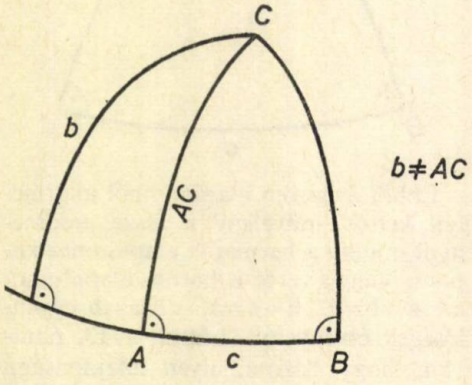


Ebből a három alapidomból akármelyik kettőt „művelem" is össze, eredményül mindig a harmadik alapidomot kapom. Vagyis: erre a három alapidomra az $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{c}$, $\mathbf{b} \sim \mathbf{c} = \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \sim \mathbf{a} = \mathbf{b}$ egyenlőségek érvényesek. Láttuk a **13.** pontban, hogy három, ilyen tulajdonságú elem önmagában is kielégíti az I., II., III. axiómákat anélkül, hogy közben ki kellene lépnünk a három elem meghatározta halmazból (csak ott az elemeket rendre *p*, *q*, *r*-rel jelöltük). Ezt úgy fejezhetjük ki, hogy ez a három alapidom a gömbi alapidomok alkotta projektív síknak egy *részsíkját* határozza meg.

20. Ez a háromelemű részsík gyakran vezet ahhoz a következtetéshez, hogy a projektív síkon az $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{c}$ egyenlőségből *mindig* következnek az $\mathbf{a} \sim \mathbf{c} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \sim \mathbf{c} = \mathbf{a}$ egyenlőségek. Ez viszont már nem igaz! Ha a gömbön felveszek egy nem háromszor, hanem csak kétszer derékszögű háromszöget:



akkor itt igaz ugyan, hogy az A és B pontokon az $\mathbf{a}\sim\mathbf{b}=\mathbf{c}$ alapidom c egyenlítői főköre megy át, de például az A és C pontokon már nem a B ponthoz tartozó b egyenlítői főkör megy át:



Vagy: a **15.** pont hételemű síkján az 1,2,6 elemek kielégítik az $1\sim2=6$, $1\sim\sim6=2$, $2\sim6=1$ egyenlőségeket — de csakis ők! — a hételemes síknak semmilyen másik elemhármasa nem teljesíti ezeket a követelményeket.

21. Másik gyakori javaslat: az "$\mathbf{a}\sim\mathbf{a}$-értelmezetlenség" kiküszöbölése. Ép érzékű hallgatók nehezen nyugszanak bele ilyesféle tilalomba, és megpróbálják valahogy kikerülni — például az „$\mathbf{a}\sim\mathbf{a}=\mathbf{a}$" bevezetésével. Axiómáink birtokában a következőképpen érvelhetünk:

Adott egy halmaz, benne egy bináris művelet, amelyre érvényesek a II/$\mathbf{a}\sim\mathbf{b}=\mathbf{b}\sim\mathbf{a}$ és III/$(\mathbf{a}\sim\mathbf{b})\sim(\mathbf{a}\sim\mathbf{c})=\mathbf{a}$ axiómák. Tegyük fel, hogy valamilyen módon értelmeztük az összes, $\mathbf{a}\sim\mathbf{a}$ típusú kifejezést is! Legyen most **a** és **b** a halmaz két különböző eleme, és képezzük belőlük az $(\mathbf{a}\sim\mathbf{b})\sim(\mathbf{a}\sim\mathbf{b})$ kifejezést! Ennek a kifejezésnek, az eddigiek szerint, értelmezve kell lennie, — azonkívül, a III. axióma szerint, egyenlőnek kell lennie **a**-val —, de egyenlőnek kell lennie, ugyancsak a III. axióma alapján, **b**-vel is. Vagyis: éppen $\mathbf{a}=\mathbf{b}$-re jutottunk, pedig abból indultunk ki, hogy **a** és **b** különböznek egymástól. Ezért az $\mathbf{a}\sim\mathbf{a}$ típusú kifejezéseknek valóban értelmezetlennek kell maradniuk, — hacsak a halmazuknak egynél több eleme van.

22. Az előző két pontból láthattuk, hogy a projektív síkon $\mathbf{a}\sim\mathbf{b}=\mathbf{c}$-ből nem mindig következnek az $\mathbf{a}\sim\mathbf{c}=\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\sim\sim\mathbf{c}=\mathbf{a}$ egyenlőségek, — másrészt, egy elem önmagával képzett műveletét egynél több elemű síkoknál nem értelmezhettük. Érdekes ellenpéldához jutunk, ha engedünk a kísértésnek, és — csak egy rövid kitérő erejéig — megkérdezzük: léteznek-e egyáltalán olyan halmazok és műveletek (jelöljük a műveletet, mondjuk „Δ"-val!), ahol az $\mathbf{a}\Delta\mathbf{b}=\mathbf{c}$ egyenlőségből igenis következnek az $\mathbf{a}\Delta\mathbf{c}=\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\Delta\mathbf{c}=\mathbf{a}$ egyenlőségek?

Először tisztázzuk: mit is kérdezünk? Azt kérdezzük, hogy létezik-e olyan halmaz, benne egy „Δ" jelű bináris művelettel, amire a következő axiómák igazak:

I*) $\mathbf{a}\Delta\mathbf{a}$ értelmezetlen;
II*) $\mathbf{a}\Delta\mathbf{b}=\mathbf{b}\Delta\mathbf{a}$;
III*) $\mathbf{a}\Delta\mathbf{b}=\mathbf{c}$-ből $\mathbf{a}\Delta\mathbf{c}=\mathbf{b}$ és $\mathbf{b}\Delta\mathbf{c}=\mathbf{a}$

következnek.

Válaszunk: igen, ilyen halmazok léteznek. Például a **15.** pont háromelemű halmaza is ilyen (amely tehát, ezek szerint, mind a két axiómarendszernek eleget tesz), de ilyen a következő, hételemű halmaz is (a 19. oldalon):

Mit jelent ez? Vegyük a halmaz két különböző, de egyébként tetszőleges elemét, mondjuk 5-öt és 6-ot! A művelet-

	0	1	2	3	4	5	6
0	–	3	6	1	5	4	2
1	3	–	4	0	2	6	5
2	6	4	–	5	1	3	0
3	1	0	5	–	6	2	4
4	5	2	1	6	–	0	3
5	4	6	3	2	0	–	1
6	2	5	0	4	3	1	–

tábla szerint $5 \Delta 6 = 1$; akkor viszont a III.* axiómából arra következtetünk, hogy egyrészt: $5 \Delta 1 = 6$; másrészt: $6 \Delta 1 = 5$; és a művelettábla valóban ki is elégíti ezt a két egyenlőséget.

Igaz-e itt az egyszerűsítési szabály? Azaz: következik-e $a \Delta b = a \Delta c$-ből $b = c$? Legyen: $a \Delta b = d$; akkor $a \Delta c = d$; innen, a III*. axióma szerint, egyrészt $a \Delta d = b$, másrészt $a \Delta d = c$ következik. Ebből: $b = c$ — vagyis: itt már érvényes az egyszerűsítési szabály!

Utolsó kérdésünk ezzel a „másfajta" axiómarendszerrel kapcsolatban: Szükségszerű-e itt az $a \Delta a$-értelmezetlenség? Ha megpróbálkozunk az „$a \Delta a = a$" definícióval, akkor itt nem bonyolódunk olyan ellentmondásba, mint a projektív síkon (lásd **21.** pont!). Itt tehát az „$a \Delta a$ értelmezetlen" kijelentést helyettesíthetjük az „$a \Delta a = a$" definícióval. Műveletáblánk akkor ilyen lesz:

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	3	6	1	5	4	2
1	3	1	4	0	2	6	5
2	6	4	2	5	1	3	0
3	1	0	5	3	6	2	4
4	5	2	1	6	4	0	3
5	4	6	3	2	0	5	1
6	2	5	0	4	3	1	6

Folytatjuk.

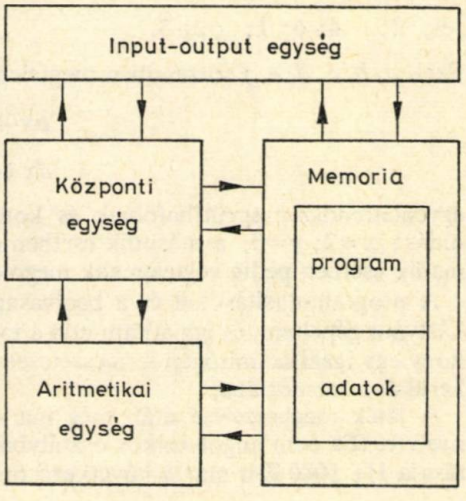
JUHÁSZ TIBOR
középiskolai tanár
I. István Gimnázium, Kalocsa

Játsszunk számítógépet!

A HT 1080 Z School-Computerek elterjedése nagymértékben megnövelte a tanulók érdeklődését a számítógépek iránt. Ennek kielégítésére lehetőséget nyújt a gimnáziumi III. osztályos matematikaanyag „Számítástechnika" fejezete. Az alábbiakban egy olyan óra menetét szeretném ismertetni, amely közelebb hozza a tanulókhoz a számítógépek programozásának és működésének elveit, kiegészítve ezzel a fent említett fejezetet.

Az órát a számítógépek ábra szerinti felépítésének ismertetésével kezdem. Megbeszéljük az egyes részek funkcióját, majd kiosztom a szerepeket. Nyolc tanuló játssza az adattárolók szerepét, egy a táblánál az aritmetikai egység szerepét, egy az I/O egység szerepét, a többi tanuló a programtárolók szerepét. Ezek száma az alábbi példában kilenc, de ha kevesebb tanuló marad, akkor a programutasítások tovább tömöríthetők. A központi egység szerepét célszerű, ha magunkra vállaljuk.

Először utasítjuk az „I/O egységet", hogy ossza ki a programtárolók között az utasításokat. Ezek a következők:



1. Olvass be 6 számot és tárold le az M1, M2, M3, M4, M5 és M6 memóriába!
2. Az M7 memóriába tárold le az M1 és M5 memóriában levő számok szorzatának és az M2 és M4 memóriában levő számok szorzatának különbségét!
   Az M8 memóriába tárold le az M3 és M5 memóriában levő számok szorzatának és az M2 és M6 memóriában levő számok szorzatának különbségét!
   Az M9 memóriába tárold le az M1 és M6 memóriában levő számok szorzatának és az M3 és M4 memóriában levő számok szorzatának különbségét!
3. Ha az M7 memóriában levő szám zérus, akkor a 6. utasításnál folytasd a számolást!
4. Számold ki és írd ki az M8 és M7 memóriában levő számok hányadosát, illetve az M9 és M7 memóriában levő számok hányadosát!
5. A 9. utasításnál folytasd a program végrehajtását!
6. Ha az M8 és az M9 memóriában is zérus van, akkor a 8. utasításnál folytasd a program végrehajtását!
7. Írd ki, hogy „ELLENTMONDÁS", és a 9. utasításnál folytasd a program végrehajtását!
8. Írd ki, hogy „VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS VAN"!
9. Írd ki, hogy „VÉGE", és az 1. utasításnál folytasd a program végrehajtását!

Azért választottam a kétismeretlenes egyenletrendszerek determinánssal való megoldását, mert ez nem tananyag, s ezért a tanulók — a számítógéphez hasonlóan — nem tudják, hogy milyen feladatot oldanak meg. Ezt csak a játék végén közlöm velük, s ekkor következhet az egyenletek felírása és a megoldások ellenőrzése.

A beolvasás után indulhat a program futása. A „központi egység" sorban megkérdezi a „programtároló memóriáktól" az utasításokat, és felszólítja az „aritmetikai egységet" azok végrehajtására. Az adatok beolvasása és a számítások elvégzése után az I/O egység írja fel a táblára az eredményt. Közben a program utasításainak megfelelően az „adattároló memóriák" jegyzik a részeredményeket.

A programot egyszerű értékekkel célszerű „futtatni" 2-3 esetet végigszámolva. Mi a következő adatokat vettük:

az 1. utasítás által beolvasott 6 szám:

1; 2; 8; 2; −1; 1

2; −1; 2; 4; −2; 3

és 2; 4; 6; 1; 2; 3.

Ezek a, b, c, d, e, f sorrendben megfelelnek az

$$ax+by=c$$

$$dx+ey=f$$

egyenletrendszer együtthatóinak és konstansainak. Ezért az első esetben a megoldás: $x=2$; $y=3$, a második esetben ellentmondásos az egyenletrendszer, a harmadik esetben pedig végtelen sok megoldása van.

A programutasításokat és a beolvasandó adatokat az érdekesség kedvéért lyukkártyára gépeltem, és így adtam oda a tanulóknak. De felhívtam a figyelmüket arra, hogy egy igazi számítógép természetesen nem nyeli el a kártyákat, csak a tartalmuk kerül át a memóriába.

A játék megbeszélése után még maradt idő az utasítások lefordítására BASIC nyelvre. (Ez nem angol-szakos osztályban sem jelent nehézséget.) A program futtatása a HT 1080 Z-n már a következő órára maradt.

A program listája:

```
1 INPUT M1, M2, M3, M4, M5, M6
2 M7=M1*M5-M2*M4 : M8=M3*M5-M2*M6 : M9=M1*M6-M3*M4
3 IF M7=Ø THEN GOTO 6
4 PRINT "X="; M8/M7, "Y="; M9/M7
5 GOTO 9
6 IF M8=Ø AND M9=Ø THEN GOTO 8
7 PRINT "ELLENTMONDAS" : GOTO 9
8 PRINT "VEGTELEN SOK MEGOLDAS VAN"
9 PRINT "VEGE" : GOTO 1
```

A BASIC nyelven megírt program igazodik a tanulók által végrehajtott utasítássorozathoz, ezért nem használ ki minden lehetőséget, amit ez a programozási nyelv megenged.

A játék során a következő didaktikai célokat lehet szinte észrevétlenül megvalósítani:

— A számítógépek elvi felépítésének és működésének megismerése.
— A *programtárolás* fontosságának hangsúlyozása.
— A számítógépek programozásához használt fontosabb utasítástípusok megismerése (értékadó utasítás, feltétlen és feltételes vezérlésátadás, I/O utasítások).
— A számítógépekkel kapcsolatos „mítosz" eloszlatása (a számítógép „nem tudja", hogy milyen feladatot old meg, csak pontosan végrehajtja az utasításokat).

Jelenleg a számítógépekkel és a programozással kapcsolatos ismeretek nem szerepelnek a matematika-tantervekben. Nem szabad azonban kihasználatlanul hagyni az iskolaszámítógép nyújtotta lehetőségeket, s fel kell készíteni a tanulókat arra, hogy az elkövetkező években a számítástechnika nélkülözhetetlenné válik az élet minden területén.

KÖNYVISMERTETÉS

Hugo Steinhaus: Matematikai kaleidoszkóp

Budapest, 1984, Gondolat Könyvkiadó, 357 oldal, 46,— Ft

Hugo Steinhaus (1887—1972) ismert lengyel matematikus könyve először 1948-ban jelent meg 125 feladattal. E könyv átdolgozott orosz nyelvű kiadásának magyar fordítását 1951-ben jelentette meg a Művelt Nép Könyvkiadó. A könyv világszerte nagy sikert aratott, sok nyelvre lefordították (csak angol nyelven 4 kiadást ért meg eddig). A szerző feladatgyűjteményét kiadásról kiadásra állandóan gyarapította, és ez a most megjelent kötet már csaknem 400 feladatot, illetve feladatváltozatot tartalmaz.

A témakörükben rendkívül változatos feladatok túlnyomó többsége ismert klasszikus feladat, de kiválasztásuk, elrendezésük és bemutatásuk elve új. Minden célba vett matematikai ismeretet és jelenséget a szerző egy vagy több ábrával vagy fényképpel mutat be, és ezekről a jelenség magyarázatát vagy a feladat megoldását (ha egyáltalán van ilyen) az olvasó maga is elkészítheti. Ezért a kötetben szigorúan vett megoldások és bizonyítások alig vannak. Az olvasó ilyen irányú munkájának megkönnyítése vé-

gett a könyv magyar kiadásához Bezdek András és Fodor János számos segítő megjegyzést fűzött.

A könyv 13 fejezetből áll. Valamennyi fejezet címe nagyon szellemes (pl. a 10. fejezet a Mókusok, csavarok, gyertyák, hangok, árnyékok címet viseli), de a bennük tárgyalt matematikai témákat többször csak áttételesen jelzik. A kötetben összegyűjtött feladatok nagyon sokféle témájából ízelítőül csak az alábbiakat említjük meg: játékok, amelyekben a nyeréshez vezető helyes játékmód megadható vagy nem adható meg; lottó, sakk, szimmetria-jelenségek, optikai csalódások, a legkisebb felületek kialakulása, optimalizációs feladatok, üldözési feladatok, valószínűségszámítási problémák, a prímszámokkal kapcsolatos kérdések, régi francia zárszerkezetek, síklapok és terek kitöltése, parkettázás, csuklós szerkezetek, pontok eloszlása, a hangskála matematikája, az aranymetszés, a Fibonacci-féle számok, mérlegelési feladatok, szabályos testek, a dátumválasztó vonal kijelölése, csomózás, térképszínezés.

A Jegyzetek című részben a szerző az egyes feladatok forrását, történetét ismerteti. A megjegyzéseket mindig az ábrákhoz fűzi, hiszen a feladatok nincsenek megszámozva, ezért a folyamatos szöveg esetenként megnehezíti a tájékozódást és az utólagos visszakeresést. Ezt a nehézséget csaknem teljesen feloldja a részletes név- és tárgymutató, de ez sem tartalmazza minden feladat feldolgozását. Az első magyar kiadásban található megoldás: sorszámozott feladatok és (csak) a tartalomjegyzékben a feladat sorszáma mellett a feladat matematikai tartalmát megfogalmazó cím, lényegesen jobb tagolást és tájékozódást nyújtott az olvasónak.

A könyv kiállítása — a külső borítólap szürke színétől eltekintve — nagyon szép és ízléses. A szedés technikájából következik, hogy a könyvben szereplő lánctörtek szedése, sajnos, nem sikerült a legjobban, és a többszörös fényképezés miatt egyes fényképeken (pl. a Galton-deszkát bemutató 383. és 384. ábrán) éppen a lényeg nem látszik jól.

A magyar fordítás (Pataki János munkája) szövege is könnyen olvasható és érthető. A közölt feladatok sokféle témája és változatos nehézségi foka miatt bármilyen érdeklődésű, előképzettségű és korú olvasó biztosan talál a könyvben számára érdekes olvasnivalót.

Dr. Scharnitzky Viktor

Török Judit: A Fibonacci-sorozat

Tankönyvkiadó, Budapest, 1984, 88 oldal, 10,— Ft

Az utóbbi néhány évben több könyv és cikk jelent meg Magyarországon, amely részben vagy egészben az aranymetszéssel, illetve a Fibonacci-féle számsorozattal foglalkozik. Ez azt mutatja, hogy egy régi és sok vonatkozásában megoldott problémakör eredményei ma is érdekesek, a belőlük levonható következtetések és az alkalmazások vitákra adhatnak okot, és tehetők fel olyan kérdések is, amelyek mindmáig megválaszolatlanok (l. pl. a 26. oldalt!).

Török Juditnak a Középiskolai szakköri füzetek sorozatában megjelent kötete a Fibonacci-sorozattal kapcsolatos érdekes és hasznos tudnivalókat elsősorban matematikai szempontból foglalta össze, de utal a sorozatnak más tudományágakban, például a biológiában, valamint a képzőművészetekben és a zeneművészetben játszott szerepére is.

A kötet két részből áll. Az első rész ismeretanyagot, tételeket, bizonyításokat, ezekhez fűzött megjegyzéseket, fel-

adatokat, ezek megoldását, valamint kitűzött feladatokat (összesen 37 feladatot) tartalmaz. A második részben a kitűzött feladatok megoldása található.

Bár az egyes fejezeteknek nincs címe (ezeken belül bizonyos alfejezeteknek viszont van, de ez nem derül ki az általában tájékoztatásra is szánt tartalomjegyzékből, amely ezek szerint fölösleges), a feldolgozott anyagban a következő csoportosítás körvonalai fedezhetők fel:

I. Bevezető feladatok, történeti áttekintés.
II. A Fibonacci-sorozat elemeinek előfordulása a természetben, a zenében, a játékban.
III. Két (egy explicit és egy rekurzív) képlet a Fibonacci-sorozat elemeinek megadására.
IV. A Fibonacci típusú sorozatok. Újabb explicit képlet a Fibonacci-sorozat elemeinek megadására.
V. Az aranymetszés és kapcsolata a Fibonacci-sorozattal.

Az nem vitatható, hogy a szerzőnek joga van úgy felépíteni, tagolni, csoportosítani a mondanivalóját, ahogyan azt a legmegfelelőbbnek látja, mégis egy középiskolásoknak szánt szakköri füzetben (amely esetleg az olvasó első, a tankönyvektől eltérő matematikai olvasmánya lehet) nem célszerű ekkora mértékű formabontást alkalmazni, mint amekkora ebben a kötetben van. Más lehet egy szakdolgozat felépítése és másnak kell lennie egy szakköri füzetének.

Az például tetszik, hogy a tételek, bizonyítások, megjegyzések, feladatok és azok megoldásának sorrendje az éppen tárgyalt anyag logikai menetéhez igazodik, és nem követi mereven a gyakran használt bevezetés — tétel — bizonyítás — alkalmazás sorrendet, az azonban nem tetszik, hogy az egybefolyó szerkesztés miatt egy-egy állításnak, gondolatnak a visszakeresése a könyv újraolvasását igényli, mert a könyvben csaknem lehetetlen a tájékozódás. Kétlem, hogy nem lehetett volna találni az előadott anyagnak legalább egy olyan rendszerezését, amely nincs ellentétben a szerző elgondolásaival, de tekintettel van az (esetleg kezdő) olvasóra is.

Az is tetszik például, hogy a könyvben megemlített személyek túlnyomó többségének születési és halálozási évszámát közli a szerző, de nem tetszik, hogy éppen Fibonacciét, a címszereplőét nem. Az adat a Természettudományi Lexikon szerint: kb. 1170—1250.

Tetszik továbbá, hogy a számozott feladatok egyikére-másikára két megoldást ad a szerző, hogy okfejtése logikus, hogy nyelvezete érthető, könnyen olvasható.

Mivel a füzet anyaga érdekes, tájékozódásra és szakköri feldolgozásra egyaránt kiválóan alkalmas, továbbá matematikai szempontból korrekt állításokat tartalmaz, nagy valószínűséggel várható, hogy a füzet 2600 példánya gyorsan elfogy. Az esetleges új kiadás megjelentetése előtt megfontolásra ajánlom előbbi megjegyzéseimet, továbbá azoknak a nyilvánvaló pongyolaságoknak a kijavítását, amelyeket a könyv lektora köteles (lett volna) észrevenni és kijavítani. Ilyenek például a következők: a sorozatnak (teljesen ötletszerűen) hol elemei, hol tagjai vannak. Az „egy egész csomó növény" (10. oldal) nem biztos, hogy sokféle növényt jelent. A „kész vagyunk" (14. oldal) nemcsak azt jelenti, hogy valamit befejeztünk. Határozottan meg kell mondani, hogy a szögletes zárójel (16., 39. és 66. oldal) ebben a füzetben mit jelöl. Egy-egy sorban álló elemeknek csak egy-egy összege lehet, több nem (17. oldal). „A három kör aranymetszési viszonyban áll egymással" kijelentés (46. oldal) vajon mit jelent? A körök milyen adatára érvényes a megállapítás? A területek mérőszámára?

A felsorolt és ehhez hasonló kifogások ellenére a kötet érdekes színfolt a szakköri füzetek sorozatában.

Dr. Scharnitzky Viktor

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: 1052 Budapest, Petőfi Sándor u. 10 II. 10., Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1119. Bizonyítsuk be, hogy az a tízes számrendszerbeli szám, amely 1986 darab 2-es és 1988 darab 1-es számjegyből áll, nem négyzetszám!

Varga István, Nagyszalonta

1120. Egy tetraéder szemköztes élpárjainak a hosszát jelölje rendre a, c; b, d; e, f. Igazoljuk, hogy

$$0 \leqq |e^2+f^2-(b^2+d^2)| \leqq 2ac.$$

Sándor József, Farcád

1121. Mi az $ABCD$ konvex négyszögbe írt oly paralelogrammák középpontjainak mértani helye, melyeknek csúcsai a négyszög különböző oldalain vannak?

Szeredi Éva, Budapest

1122. Legyen $\alpha > -1$ zérustól különböző valós szám. Mutassuk meg, hogy minden n természetes szám esetén:

$$\frac{1}{\alpha}((1+\alpha)^n-1) \geqq n+\frac{n(n-1)}{2}\alpha.$$

Cseh László, Kolozsvár

1123. Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \geqq 2$ pozitív egészre

$$2^{(n/2)-1} < \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\operatorname{tg}\frac{k\pi}{4n}\right) < 2^{n/2}.$$

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

1124. A sík n pontja olyan, hogy közülük bármelyik négy egy konvex négyszög csúcsai. Igazoljuk, hogy az n pont egy konvex n-szög csúcsai!

Feladatmegoldások (1095—1100)

1095. Egy vándor a Kazohinia felé vezető úton elágazáshoz ér, ahol is három testvér lakik, akikről tudja, hogy közülük kettő igazmondó, egy pedig szeszélyes: kiszámíthatatlanul mond igazat, illetve hazudik. A vándor csak e testvérektől tudhatja meg, hogy az elágazások melyike vezet Kazohinia felé. Járhat-e sikerrel pusztán két kérdés révén?

I. megoldás: Az első kérdés egy utasítás. Amikor mind a három testvér együtt van, a vándor felszólítja őket:

Mindenki mutasson rá arra, aki nem mond mindig igazat! Akire legalább ketten mutatnak, az a szeszélyes. Ezután a vándor valamelyik igazmondótól kérdezi meg:

Melyik elágazás vezet Kazohiniába?

Helyes választ kap, két kérdés révén.

Bagi István, Barcs

II. megoldás: Először a vándor tegye fel a testvérek valamelyikének a következő kérdést:

— Két testvéred közül melyik mutatná meg helyesen a Kazohiniába vezető utat?

Ekkor, ha a szeszélyest kérdeztük, mindenképpen igazmondóra mutat, ha pedig a kérdezett igazmondó volt, akkor a másik igazmondót mutatja.

Ezután ettől a testvértől kell megkérdezni, hogy melyik út vezet Kazohiniába.

Tehát a válasz: igen.

Németh László, Fonyód,
Szabó Zsófia, Békéscsaba

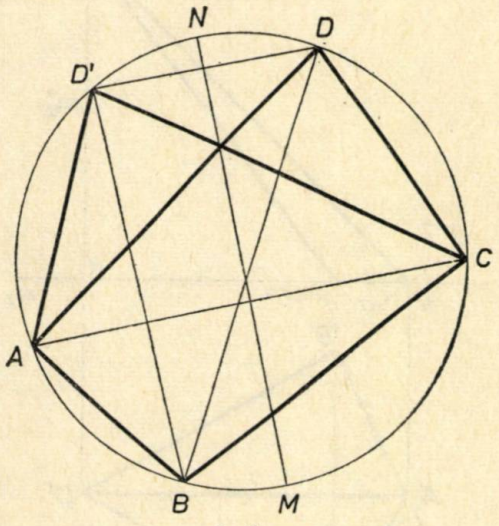
Megjegyzés: Az I. megoldásban az először feltett kérdés (utasítás) valójában három kérdés (utasítás), amely egyszer hangzik el, de külön-külön szól valamennyi testvérnek. Eme értelmezés mellett a megoldás négy kérdéssel ad helyes útirányt. A feladat szövegezése nem feltétlenül zárja ki a három testvérnek egyszerre szóló kérdés feltevését, illetve ennek egy kérdésként való elszámolását, ezért a hasonló úton járó megoldásokat is elfogadtuk.

A megoldók száma: 24.

1096. Mutassuk meg, hogy bármely körbe írható két nem egybevágó, de egyenlő kerületű és területű négyszög!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Legyen MN egy tetszőleges kör rögzített átmérője, A a kör M-től és N-től különböző pontja, az A pontnak az MN átmérőre vonatkozó tükörképe C (tehát C rajta van a körön), B az $\overset{\frown}{AMC}$ körív A-tól, M-től, C-től különböző pontja, D az $\overset{\frown}{ANC}$ ív A-tól, N-től, C-től különböző pontja, D' pedig a D pontnak az MN-re vonatkozó tükörképe (azaz D' is a körön van; *1. ábra*).



1. ábra

Az $ACDD'$ négyszög szimmetrikus trapéz ezért

$$CD = AD' \quad \text{és} \quad AD = CD',$$

továbbá az ACD és ACD' háromszögek egybevágósága miatt területük is egyenlő. Ebből

$$AB+BC+CD+DA = AB+BC+CD'+D'A$$

és

$$t_{ABC}+t_{ACD}=t_{ABC}+t_{ACD'}$$

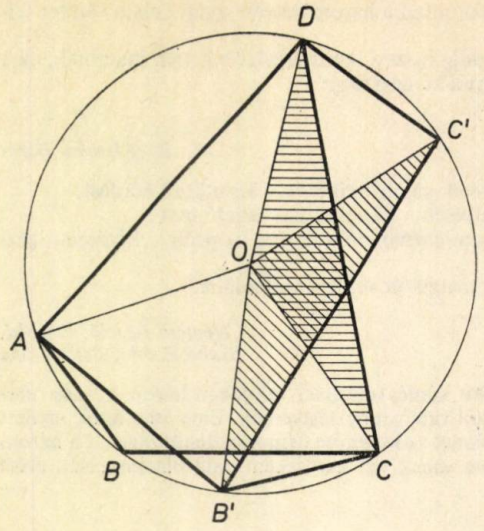
vagyis az $ABCD$ négyszög kerülete, illetve területe egyenlő az $ABCD$ négyszög kerületével, illetve területével.

Mivel MN a DD' szakasz felezőmerőlegese és B az MN által határolt egyik félsík belső pontja, ezért $BD \neq BD'$ (pontosabban: B ahhoz a szakaszvégponthoz van közelebb, amelyik ugyanabban a félsíkban van). Ennélfogva az $ABCD$ és az $ABCD'$ négyszögek nem egybevágóak, igazoltuk tehát, hogy bármely körbe írható két nem egybevágó, de egyenlő kerületű és területű négyszög.

Megjegyzések:

1. Hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy bármely körbe írható két nem egybevágó, de egyenlő kerületű és területű n-szög.

Burus Árpád Csaba, Székelyudvarhely



2. ábra

2. Ha a körbe írt $ABCD$ négyszög nem deltoid és tartalmazza a kör O középpontját, akkor az OAB, OBC, OCD és ODA háromszögeket három különböző sorrendben illeszthetjük egymáshoz — sugárnyi oldalaik mentén —, ezért három nem egybevágó, de egyenlő kerületű és területű, ugyanabba a körbe írt négyszöget nyerünk. (2. *ábra*).

Barta Miklós, Marosújvár

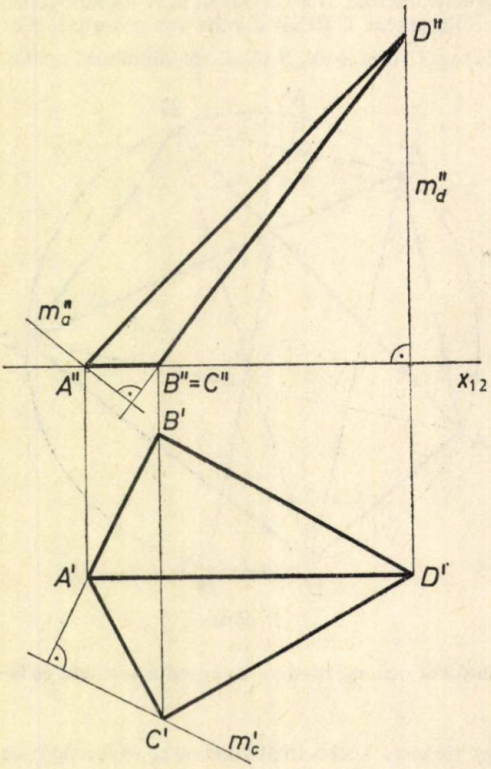
Fazekas Jánosné, Szeghalom

A megoldók száma: 32.

1097. Van-e olyan tetraéder, amelynek mindegyik magasságvonala a tetraéderen kívül halad?

I. megoldás: A válasz igenlő. Legyenek (PP') és (QQ') α, illetve β tompaszögű lapszögtartományok. Ha a két lapszögtartomány közös részeként származtatjuk az $ABCD$ tetraédert *(3. ábra,* l. a borítón*)*, akkor ennek egy-egy lapja a megfelelő lapszög egyik oldalán van, és az AC, illetve a BD kitérő élek a β, illetve α szögű lapszög élének egy szakasza. Ennélfogva a tetraéder bármely magassága a tetraéderen kívül halad, hiszen a tetraéder bármely csúcsa és az ezzel szemköztes lap ugyanannak a lapszögnek egy-egy oldalán vannak, és mert a lapszög tompaszögű, ezért a csúcsból a másik oldal (lap) síkjára bocsátott merőleges talppontja az oldalon kívül van.

Körtesi Péter, Marosvásárhely,
Mészáros Mihály, Hejőkeresztúr,
Zsidó-Nagy György, Kolozsvár



4. ábra

II. megoldás: Az alábbi konstrukció mutatja, hogy van olyan tetraéder, amelynek minden magasságvonala a tetraéderen kívül halad.

A tetraédert két képével adtuk meg *(4. ábra)*. Az A, B, C, D csúcsokból a szemközti lap síkjára bocsátott merőleges egyenesek egy-egy (a kívánt tulajdonságot mutató) képét szerkesztettük meg. Ezeknek a tetraéder szemköztes lapjával nincs közös pontjuk (a B csúcshoz tartozó magasságot szimmetria-okok miatt nem rajzoltuk meg) és erről az egyik képük alapján meggyőződhetünk.

Mindazok a tetraéderek a feladatbeli tulajdonságúak, amelyeknek egyik lapja tompaszögű háromszög és a negyedik csúcsból induló magasságvonal talppontja a tompaszögtartományban, a háromszögön kívül van. Ezt fenti konstrukciónkhoz hasonlóan igazolhatjuk.

Kamarás Lajos, Pécs

III. megoldás: Tegyük fel, hogy az $ABCD$ tetraéder a feladatban kirótt tulajdonságú. Ezért az A csúcshoz tartozó m_A és a C csúcshoz tartozó m_C magasság a poliéderen kívül halad, tehát a CBD és ABD lapok lapszöge tompaszög. Hasonlóan nyerjük, hogy az ABC és az ACD lapok lapszöge is tompaszög.

Megmutatjuk, hogy ilyen tetraéder létezik.

Legyen az $ABCDEFGH$ kocka éleinek hossza 10 egység, és vegyünk fel a CG élen egy P pontot úgy, hogy $CP=1$ egység *(5. ábra)*. Belátjuk, hogy az $ABPD$ tetraéder két lapszöge tompaszög, és így magasságvonalai a kívánt tulajdonságúak.

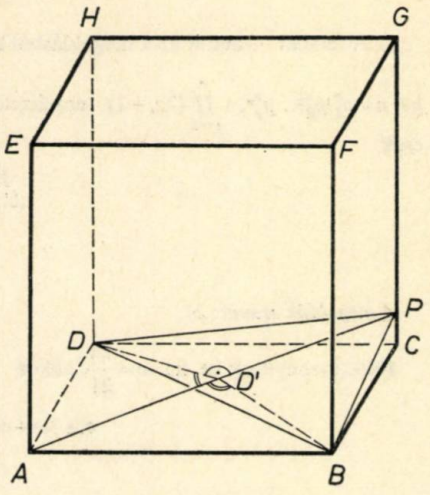
Az ABD és a BDP lapok lapszöge tompaszög, hiszen e lapszögtartomány tartalmazza a vele közös élű, ABD és $BDHF$ lapok által határolt derékszögű lapszöget. Emiatt az A és a P csúcsokból húzott magasságvonalak a tetraéderen kívül haladnak.

Tetraéderünk síkszimmetrikus az $ACGE$ síkra. Az ADP és ABP (egybevágó) háromszögek derékszögűek, hiszen AD merőleges a $DCGH$ síkra, merőleges tehát a DP egyenesre is. Ha D vetületét az AP átfogón D' jelöli, akkor az említett szimmetria miatt a $DD'B\sphericalangle=\varphi$ méri az ADP és APB lapok lapszögét. Mivel

$$DD' \cdot AP = AD \cdot DP,$$

ezért

$$DD' = \frac{10\sqrt{101}}{\sqrt{201}}.$$



5. ábra

A $DD'B$ egyenlő szárú háromszög BD oldalára felírt koszinusz-tételből:

$$200 = 2 \cdot \frac{100 \cdot 101}{201} - 2 \cdot \frac{100 \cdot 101}{201} \cos\varphi,$$

amiből

$$\cos\varphi = -\frac{100}{101} < 0,$$

vagyis φ tompaszög, tehát a B és a D csúcsokhoz tartozó magasságok is a tetraéderen kívül haladnak.

Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza

A megoldók száma: 19.

1098. Legyenek $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ különböző prímszámok. Hány természetes egész megoldása van az

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n}$$

egyenletnek?

Varga István, Nagyszalonta

Megoldás: Skljarszkij—Csencov—Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, I. rész, Aritmetika és Algebra c. könyv (Tankönyvkiadó, Bp. 1965) 123*a*. feladata tárgyalja az $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$ egyenlet megoldását az egész számok halmazán. Ebből kiderül, hogy a megoldásokat az

(1) $x=a+d$, $y=a+\frac{a^2}{d}$ és a

(2) $x=a-d$, $y=a-\frac{a^2}{d}$ egyenletrendszerek szolgáltatják, ahol d az a^2 osztója. Mivel feladatunk csak a természetes egész megoldások számát kérdezi, így (2)-ből nem kapunk megoldásokat, azokat (1) adja. A megoldások számát pedig

$a^2=\prod_{i=1}^{n} p_i^2$ osztóinak száma adja, ami p_i-k különböző volta miatt 3^n.

Ambrus Gabriella, Budapest,
Csorba Ferenc, Győr

Megjegyzések:

1. Az egyenlet x és y változóinak szerepe felcserélhető, tehát a 3^n megoldásban minden különböző számokból álló számpár kétszer szerepel. Egy esetben $(x=y=2p_1p_2\ldots p_n)$ a két változó értéke megegyezik. Mindezek alapján $x \leqq y$ feltétel mellett csak $\frac{3^n+1}{2}$ megoldás van.

Hajna János, Pécs,
Udvari Tibor, Baja

2. A feladat — amint az a megoldásból kitűnik — általánosítható: az $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ egyenletnek, ha $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$, $\prod_{i=1}^{r}(2\alpha_i+1)$ természetes egész megoldása van, illetve az $x \leqq y$ feltétel mellett csak

$$\frac{\prod_{i=1}^{r}(2\alpha_i+1)+1}{2}.$$

Hajna János, Pécs,
Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

A megoldók száma: 24.

1099. Bizonyítsuk be, ha $\omega=\frac{2\pi}{21}$, akkor

$$\cos 3\omega+\cos 6\omega+\cos 9\omega=\cos 7\omega.$$

Kárteszi Ferenc, Budapest

I. megoldás: A bizonyítandó azonosság egyenértékű a következővel:

$$(*)\qquad \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$$

Jelöljük az előbbi cosinusok összegét S-sel:

$$S=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}.$$

Észrevehető, hogy:

$$2\cdot S\cdot\sin\frac{\pi}{7}=2\cdot\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\cdot\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\cdot\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=$$

$$=-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}+\sin\pi=-\sin\frac{\pi}{7},$$

ahonnan figyelembe véve, hogy $\sin\frac{\pi}{7}\neq 0$ — kapjuk, hogy $S=-\frac{1}{2}$, amit bizonyítani kellett.

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy,
Peták Tamás, Szolnok,
Sándor József, Farcád

II. megoldás: Induljunk ki az előbbi megoldás $(*)$ azonosságából! Használjuk fel, hogy $\cos\frac{4\pi}{7}=$ $=-\cos\frac{3\pi}{7}$ és $\cos\frac{6\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}$. Ezért a bizonyítandóval egyenértékű

(1) $\frac{1}{2}+\cos\frac{2\pi}{7}=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$ állítást kapjuk. Legyen az ABC egyenlő szárú háromszög AB-n

fekvő két szöge $\frac{3\pi}{7}$ *(6. ábra)*. Vegyük fel D-t a BC oldalon úgy, hogy ABD is egyenlő szárú legyen. A szögek vizsgálatából ekkor kitűnik, hogy CDE is egyenlő szárú háromszög.

Tekintsük egységnyinek az AB oldalt. Mivel $AB=AD=DE=EC=1$, és ismerjük a szögeket, meg tudjuk adni CD, DB és EA hosszát.

$$CD = 2\cdot\cos\frac{\pi}{7},$$

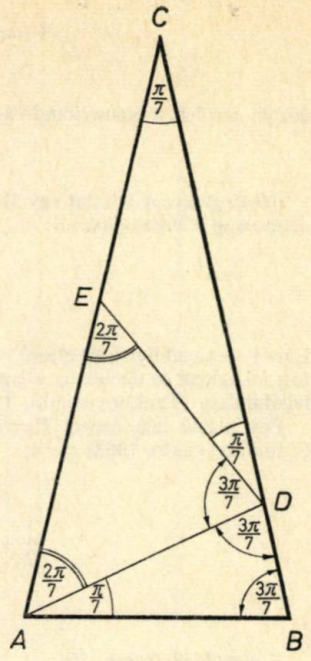
$$DB = 2\cdot\cos\frac{3\pi}{7},$$

$$EA = 2\cdot\cos\frac{2\pi}{7}.$$

Mivel $CA=CB$, valamint $CA=1+EA$; $CB=CD+DB$, adódik az $1+2\cos\frac{2\pi}{7}=2\cos\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{3\pi}{7}$, ami megegyezik (2-vel való osztás után) az (1)-gyel.

Ezzel állításunkat bizonyítottuk.

Peták Tamás, Szolnok,
Udvari Tibor, Baja



6. ábra

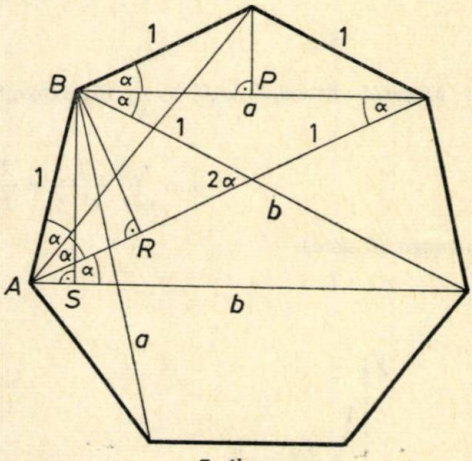
III. megoldás: Az első megoldás (∗) azonosságát igazoljuk. Jelöljük az egységnyi oldalhosszú szabályos hétszög rövidebb átlójának hosszát a-val, a hosszabb átlóét b-vel és $\frac{\pi}{7}$-et α-val *(7. ábra)*. Ekkor az ábra jelöléseivel

$$\cos\frac{2\pi}{7} = \cos 2\alpha = AR = \frac{b-1}{2},$$

$$\cos\frac{4\pi}{7} = -\cos\frac{3\pi}{7} = -\cos 3\alpha = -AS = \frac{a-b}{2},$$

$$\cos\frac{6\pi}{7} = -\cos\frac{\pi}{7} = -\cos\alpha = -BP = -\frac{a}{2}.$$

Ezek összege $-\frac{1}{2}$, ezért az állítás igaz.



7. ábra

Fitos László, Esztergom

IV. megoldás: Ismert, hogy vektorok eredőjének vetülete egyenlő az összetevők vetületeinek összegével.

Tekintsük az $A_1A_2\ldots A_n$ szabályos n-szöget, melynek középpontja O. Jelölje $\mathbf{s}$ az $\overrightarrow{OA_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ összetevők összegét. Ha most az összetevők mindegyikét $\frac{2\pi}{n}$ szöggel elforgatjuk, akkor az $\mathbf{s}$ eredő is ugyanannyival fordul el, de mert az összetevői ugyanazok maradtak, így $\mathbf{s}=0$ kell legyen.

Ha most $|\overrightarrow{OA_i}|=1$ és $\overrightarrow{OA_1}=\mathbf{i}$, akkor $\overrightarrow{OA_i}\left(\cos(i-1)\frac{2\pi}{n};\ \sin(i-1)\frac{2\pi}{n}\right)$ tehát $\mathbf{s}=0$ miatt

$$1+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos 2\frac{2\pi}{n}+\ldots+\cos(n-1)\frac{2\pi}{n}=0.$$

Ebből $n=7$-re a bizonyítandó állításhoz jutunk.

Sándor József, Farcád,
Zalán Péterné, Budapest

Megjegyzés: A feladat egy általánosítását kapjuk a fenti IV. megoldásból a $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$ azonosság felhasználásával:

$$\sum_{i=1}^{n}\cos i\frac{2\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}.$$

Ennek — az eddigiektől eltérő — megoldása megtalálható: *Skljarszkij—Csencov—Jaglom:* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 1., Aritmetika és algebra című könyv 229. feladatában (Tankönyvkiadó, 1965).

Egy másik lehetőséget *Faragó László:* Matematikai szakköri feladatgyűjtemény 527. feladata (Tankönyvkiadó, 1963) nyújt:

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cos nx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Oláh György, Rév-Komárom

A megoldók száma: 36.

1100. Igazoljuk, hogy minden $0<\alpha\leqq 1$ valós számra és n pozitív egészre

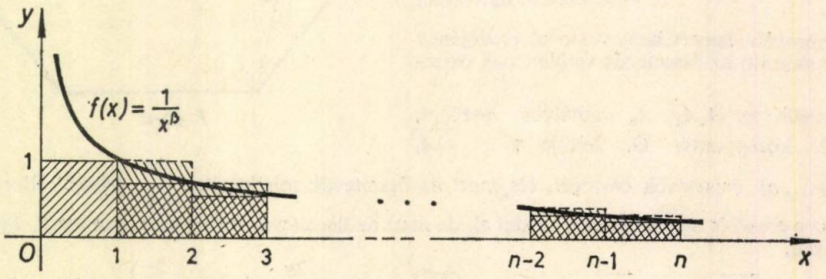
$$\frac{n^\alpha}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\leqq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{1-\alpha}}\leqq\frac{n^\alpha}{\alpha}-\frac{n^\alpha}{n}.$$

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

Megoldás: Becsüljük az $f(x)=\frac{1}{x^\beta}$ függvény-görbe alatti területtel (ahol $\beta=1-\alpha$, így $0\leqq\beta<1$) a

$$\sigma:=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{1-\alpha}}=\frac{1}{1^\beta}+\frac{1}{2^\beta}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^\beta}$$

összeget *(8. ábra).*



8. ábra

$$\sigma \leqq \int_1^n \frac{dx}{x^\beta} = \int_1^n x^{-\beta}\,dx = \left[\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_1^n = \left[\frac{x^\alpha}{\alpha}\right]_1^n = \frac{n^\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha},$$

$$\sigma \leqq 1 + \int_1^n x^{-\beta}\,dx - \frac{1}{n^\beta} = 1 + \left[\frac{x^\alpha}{\alpha}\right]_1^n - \frac{1}{n^{1-\alpha}} = 1 + \frac{n^\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} - \frac{n^\alpha}{n} \leqq \frac{n^\alpha}{\alpha} - \frac{n^\alpha}{n},$$

mert $1 - \frac{1}{\alpha} \leqq 0$.

Ezzel az egyenlőtlenségrendszert igazoltuk.

Cseh László, Kolozsvár,
Kamarás Lajos, Pécs,
Szánthó Gyula, Gyula

A megoldók száma: 16.

A megoldók névsora (1095—1100)

Ambrus Gabriella, Budapest (1095., 1096., 1098., 1099.); Bagi Barnabás, Barcs (1095.); Bagi Gábor, Barcs (1099); Bagi István, Barcs (1095.); Barta László, Nógrádmegyer (1095—1100.); Barta Miklós, Marosújvár (1096., 1098., 1099.); Bencze Mihály, Brassó (1096., 1099., 1100.); Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy (1095., 1096., 1098., 1099. 3 mód, 1100.); Boda Miklós, Pécs (1096., 1098., 1099.); Burus Árpád Csaba, Székelyudvarhely (1095—1098., 1099. 2 mód, 1100.); Cseh László, Kolozsvár (1095—1097., 1099., 1100.); Csorba Ferenc, Győr (1095—1100.); Fazekas Jánosné, Szeghalom (1095., 1096.); Fitos László, Esztergom (1097., 1099. 2 mód); Hajna János, Pécs (1095., 1096., 1098., 1099.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest (1096., 1099.); Horváth Géza, Zselíz (1099.); Horváth Tibor, Dunakeszi (1097); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1095—1098., 1099. 2 mód, 1100.); Kamarás Lajos, Pécs (1095—1100.); Kiss Géza, Kisújszállás (1096., 1098—1100.); Kiss László, Csíkszereda (1096—1100.); Kovácsné Gajdács Ibolya, Budapest (1099.); Körtesi Péter, Marosvásárhely (1096—1099.); Kun Péter, Szentendre (1095, 1098., 1099.); Dr. Major Pál, Budapest (1096., 1099.); Mészáros József, Galánta (1098., 1099. 3 mód); Mészáros Mihály, Hejőkeresztúr (1095—1097.); Merényi Imre, Kolozsvár (1095—1097., 1099., 1100.); Németh László, Fonyód (1095—1098.); Oláh György, Rév-Komárom (1098., 1099.); Peták Tamás, Szolnok (1095., 1096., 1099. 3 mód); Róka Sándor, Tiszavasvári (1096.); Sándor József, Farcád (1096. 2 mód, 1097., 1098., 1099. 4 mód, 1100.); Schutzbach Mártonné, Siófok (1095., 1098., 1099.); Szabó Zsófia, Békéscsaba (1095—1097., 1099.); Szánthó Gyula, Gyula (1096—1100.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (1095., 1096., 1098., 1099. 2 mód, 1100.); Udvari Tibor, Baja (1095—1097., 1098. 2 mód., 1099. 3 mód); Varga István, Nagyszalonta (1095—1098., 1099. 2 mód, 1100. 2 mód); Wekszli Árpád, Csorna (1095. 2 mód, 1096.); Zalán Péterné, Budapest (1096., 1098., 1099.); Zsidó-Nagy György, Kolozsvár (1095—1097., 1099., 1100.).

DR. BERÉNYI ZSUZSANNA ÁGNES
középiskolai tanár
Budapest

„Interkibernetik '85" Nemzetközi Kibernetikai Kongresszus

Az Egyetemes Kibernetikai, Informatikai és Rendszerszervezési Társulat (Tutmonda Asocio pri Kibernetiko, Informatiko kaj Sistemiko, rövidítve: TAKIS) 1985. júl. 29-től aug. 2-ig Budapesten tartotta első nemzetközi kongresszusát. A Namurben (Belgium) székelő Nemzetközi Kibernetikai Társulat, a Francia Kibernetikai Társulat és az Odobleiében (Olaszország) működő Kibernetikai Akadémia is képviseltette magát ezen az összejövetelen.

Mint üdvözlő szavaiban *Dr. Helmar Frank*, a paderborni Pedagógiai Kiber-

netikai Intézet igazgatója, egyetemi tanár (Német Szövetségi Köztársaság) elmondta, nem véletlenül rendezték ezt a jelentős kongresszust Magyarországon. A magyar kibernetikai szakemberek nemzetközi tekintélye indokolta a hely megválasztását.

Hazai részről a Neumann János Számítástudományi Társulat látta vendégül a TAKIS-kongresszust. Ez a társulat rendezte 1982-ben az INTERKOMPUTO-t is.

A szervezőbizottság elnöke *Dr. Szelezsán János*, az ELTE tanára, titkára *Tóth Miklósné*, a Neumann János Társulat titkára volt. A programbizottságot *Dr. Helmar Frank* vezette, a titkári teendőket *Dr. Dan Maxwell* (Egyesült Államok), a Berlini Műszaki Egyetem és a Nyelvészeti Intézet tanára látta el.

A négynapos előadássorozatot a SZÁMALK (Számítástechnika Alkalmazási Vállalat) korszerű épületében júl. 29-én de. 10-kor nyitották meg a „Kalmár"-teremben.

Dr. Helmar Frank „A kibernetika nyelvének forradalmi lehetősége" címen a kibernetika 1960 óta alkalmazott módszereit elméleti megvilágításba helyezte, majd méltatta az eszperantó nyelv tömörségét, egyszerűségét és szabályosságát mint a kibernetika gyakorlati és elméleti felhasználásaiban legjobban bevált kifejezési eszközt.

A namuri Notre Dame de la Paix (A Béke Boldogasszonya) egyetem tanára, *Jean Ramaekers „Információ és társadalom"*, a párizsi egyetem tanára, *Dr. Robert Vallée „Nyelvek, összetettség és transzformáció"* című előadása társadalmi kérdésekről, illetőleg a nyelvek matematikai módszerekkel történő vizsgálatáról szólt.

Az ünnepélyes megnyitó előadások után a további INTERKIBERNETIKO-előadások közvetlenebb légkörben, egy kisebb teremben folytatódtak a hetedik emeleten.

Hétfőn délután került sor a műszaki kibernetikai előadásokra. A középiskolai tanításban is hasznosíthatók *Dr. Szabó József*, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem tanára *„Számítógépes rajzolás és projektív geometria"* című előadásában ismertetett programjai. A számítógéppel készült tetszetős és ötletes ábrák nagy elismerést arattak.

Josef Vojaček, csehszlovákiai mérnök a hazájában előállított személyi számítógépeket ismertette.

Július 30-án került sor a nyelvkibernetikai tárgyú előadásokra. *Dr. Szelezsán János „Sokösszetevős szerkezet a nyelvekben"* című rövid előadását a kínai vendégnek, *Dr. Chen Yuan* egyetemi tanárnak, a kínai Alkalmazott Nyelvészeti Intézet igazgatójának nagy érdeklődéssel várt előadása követte *„A modern kínai nyelv elemeinek számszerű méréséről és elemzéséről!* Ebben a hallgatók legtöbbjének teljesen új ismereteket közölt a nehéz kínai nyelv képírásáról és kiejtéséről rendkívül élvezetes előadói stílusban, természetesen eszperantó nyelven. Megtudtuk, hogy a legnagyobb kínai szótár hatvanezer ideogramot (képjelet) tartalmaz, de már háromezerrel meg tudja értetni magát az elemi iskolai tanuló. A képjelek sora valóságos képrejtvényt jelent. Megfejtésük komoly szellemi tevékenységet igényel, a gyerek matematikai logikai ismereteivel kölcsönhatásban fejlődik. 1956-ban több, mint kétezer jelet hivatalosan leegyszerűsítettek. A legnagyobb nehézséget — akárcsak a korszerű matematikaoktatásban — a hagyományokhoz ragaszkodók ellenállásának leküzdése jelenti.

Ugyancsak a nemzetközi nyelven ismertette eszperantó—magyar fordítóprogramját a Posta Kísérleti Intézet fiatal üzemmérnöke, *Mohai Lajos*. A sikeres programot tüstént ki is próbálta a nemzetközi vendégsereg a SZÁMALK egyik gépén.

Július 31-én, szerdán tűzték műsorra a legnagyobb hallgatóságot vonzó pedagógiai kibernetikai témát.

A Quebec-i (Kanada) egyetem tanára,

Marcel Ouellet az iskolai információs hálózatról tartott érdekes ismertetést.

Dr. Milos Lansky, a paderborni Kibernetikai Intézet professzora a kibernetika iskolai felhasználásának elvi lehetőségeiről szólt.

Dr. Balázs Béla, a Marx Károly Közgazdasági Egyetem ny. tanára arról beszélt, hogy miként lehet biztosítani a kibernetikai modell segítségével az oktatási feladat hatékonyságát.

Juan Palavecino professzor, a tarragonai egyetem (Spanyolország) tanára *„Társadalmi fejlődés és nyelvi viselkedés a gyakorlatban"* címen a szavakkal és szavak nélkül történő közlést vizsgálta a gyermek életében.

A brazíliai *Dr. Osvald Sangiorgi* egyetemi tanár valószínűségszámítási módszerek alkalmazásáról számolt be a portugál nyelvű tankönyvek vizsgálatában. A számítógép alkalmazásával elvégzett kutatások eredményeképpen egyes tankönyveket kivontak a forgalomból. Egy másik matematikai számítássorozat eldönti, hogy a tanulót érdeklődése inkább a humán vagy reálismeretek felé vonzza. Ennek a pályaválasztásnál van a gyakorlatban már jól bevált alkalmazása.

Kiril Velkov, a bulgáriai Vraca város középiskolai tanára a számítógépeknek a bolgár iskolákban betöltött szerepéről beszélt. A mieinkhez hasonló gondokkal küzdenek a bolgár iskolákban is. Jelenleg fő feladatuknak a pedagógusok felkészítését és meggyőzését tartják.

Gocs Györgyné egri középiskolai tanárnőnek a gyakorlatban már felhasznált, működő programjai nagy érdeklődést keltettek. A SZÁMALK gépén öt feladatot mutatott be arra, hogy miként használja a számítógépet az eszperantó oktatásában: 1. Szótanulásra. 2. Magyar szavak eszperantóra fordításában. 3. Szavak gyakorlásában. 4. Számok tanulásában. 5. A monitoron szavak jelennek meg. Feladat: alkossunk belőlük helyes mondatokat! — A jelenlevők rögtön önállóan kipróbálhatták a programot, és nagy derültséget keltett, amikor a program szerint a képernyőn elmaraszta ló vagy biztató szavak jelentek meg.

Dr. François Lo Jacomo, párizsi líceumi tanár „Program 11" címen számítógép segítségével eszperantó tankönyvet szerkesztett. A tankönyv az ötszáz leggyakoribb eszperantó szót tartalmazza és kellő nyelvtani magyarázatot nyújt a tanulóknak.

Christian Athénour, a Nice-i egyetem tanára (Franciaország) a francia egyetemeken alkalmazott számítógépek szerepéről adott, számokkal alátámasztott, hiteles képet.

Az összejövetel utolsó napján, aug. 1-én az előadók az általános kibernetika tárgykörben elért eredményeiket ismertették.

Ezek közül pedagógiai vonatkozása a csehszlovák *Juraj Gondžur* mérnök *„Milyen tulajdonságokkal rendelkezzék a programrendszer?"* és *Szilák Antalné,* egri tanárnő *„A kibernetika néhány filozófiai problémája"* című előadásának volt.

Az utóbbi előadás érdekes vitát váltott ki. A számítógépek alkalmazása ugyanis erkölcsi kérdéseket is felvet. Ezek a gépek fokozatos elterjedésével egyre inkább az elméletből a gyakorlat területére kerülnek át és problémákat okoznak. Ezekkel az Augsburgban, 1985. aug. 4—8-ig megrendezett Egyetemes Eszperantó Kongresszus Tudományos Részlegében külön foglalkoztak.

Végül e sorok írója emlékezett meg Kalmár Lászlóról, a magyar kibernetika úttörőjéről, aki éppen ebben az esztendőben lett volna nyolcvan éves, és aznap volt kilenc éve, hogy örökre eltávozott körünkből. A megemlékezés kitért Kalmár László életútjára, sokoldalú tevékenységére, és ezen belül a magyar kibernetika megalapozásáért folytatott fáradhatatlan harcára.

Most látjuk, hogy sikeres volt a küzdelme, hiszen hazánkban is tanúi lehetünk a kibernetika robbanásszerű fejlődésének.

A megemlékezést a hallgatóságban he-

lyet foglaló Münnich Antal mérnök egészítette ki saját visszaemlékezéseivel.

Ezzel befejeződött a sok újat, érdekeset, tanulságosat adó, tizenhét országból hatvannyolc jelentkezőt számon tartó kongresszus. A névsort számítógép segítségével állították össze, de sokan érkeztek látogatóba a felsoroltakon kívül is, csak néhány előadás meghallgatására.

Az előadások szüneteiben és a két kiránduláson alkalom nyílt a kötetlen eszmecserére is. A külföldiek közül többen először ismerkedtek meg Budapesttel, és a nagy meleg ellenére lankadatlan figyelemmel kísérték az idegenvezető magyarázatát. Legtöbben el is határozták, hogy máskor is visszatérnek szép fővárosunkba.

Közlemény

A VI. nemzetközi „Szervezéstechnikai eszközök és alkalmazásuk" elnevezésű szakkiállítást és konferenciát 1986. október 3-tól 8-ig rendezik meg a Budapest Sportcsarnokban.

Az Országos Találmányi Hivatal elnöke a Magyar Közlöny 1986. évi 1. számában megjelent I-OTH-1986. sz. hirdetményében közzétette, hogy a kiállításon először bemutatásra kerülő találmányokat, ipari mintákat a jogszabályokban meghatározott *kiállítási elsőbbség illeti meg.*

Helyreigazítás

Lapunk 1985. évi 6. számának 184. oldalán az utolsó sorban — sajnálatos módon — téves információt közöltünk. Ugyanis a Bolyai János Matematikai Társulat 1984. évi Rátz László Vándorgyűlését nem Komáromban, hanem Tatabányán rendezte meg.

A hibáért Kedves Olvasóink szíves elnézését kérjük.

A szerkesztőség

Javasolt szakirodalom a Tankönyvkiadó kiadványai közül

Bognár Jánosné — Nemetz Tibor — Tusnády Gábor: *Ismerkedés a véletlennel* (29 253) 22,—
Hámori Miklós: *Halmazok. Matematikai logika* (1991) ..... 10,—
Hámori Miklós: *Tanulás és tanítás számítógéppel* (42 983) ..... 29,—
Kósa András: *Matematikai analízis a középiskolában* (52 989) ..... 40,—
Lukács Ottó: *Gyerekmatek* (1995/5) ..... 17,—
Major Zoltán — Valovics István: *A* BASIC *feladatok tükrében* (53 023) ..... 43,—
Munkaközösség: *Matematika a felvételi vizsgára készülők részére* (81 303) ..... 51,—
Radnai Gyuláné Szendrei Julianna: *A játék matematikája* (19 011) ..... 10,—
Török Judit: *A Fibonacci-sorozat* (29 261) ..... 10,—
Ujvári István: *Felkészülés és felzárkózás matematikából az általános és középiskolai tanulók számára* (19 029) ..... 18,—

Beszerezhető

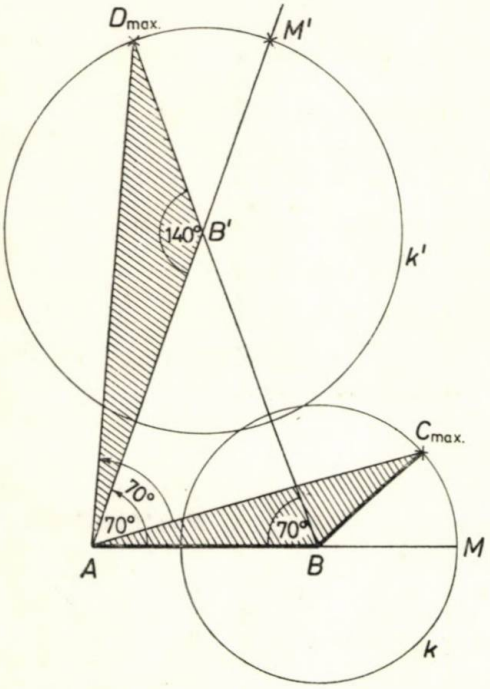
a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053) Bp., Múzeum krt. 3.). a 4. Tankönyvboltban (1051. Bp., Október 6. u. 8.)

Ára: 7,— Ft

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

VERSEGHY KÖNYVTÁR SZOLNOK



1986. április * XXXIII. évfolyam 2 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

86-849 — Szegedi Nyomda — F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését, *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

TARTALOM

Gyarmatiné Kocsis Mária: A bizonyítási igény felkeltése az általános iskolában 33
Dr. Kárteszi Ferenc: A matematikatanulás lélektana 37
Dr. Bánfalvi József: Tehetségkutatás és nevelés a matematikatantárgyban 42
Hoványi Lajos: Pillanatfelvétel 44
A zsebszámológépek iskolai bevezetése a Német Demokratikus Köztársaságban 47
Lukács Ottó: A ciklusszervezés tanítása ... 51
FELADATOK 58
ÚJ KÖNYVEK III

СОДЕРЖАНИЕ

Дярматинэ Кочиш Мария: Пробуждение потребности доказывать на уроках математики в общей школе 33
Д-р Картеси Ференц: Психология изучения математики 37
Д-р Банфалви Йожеф: Выявление и развитие талантов в обучении математике 42
Ховани Лайош: Моментальный снимок 44
Внедрение карманных вычислительных машин в школах ГДР..... 47
Лукач Отто: Обучение устройстве циклов в программировании 51
ЗАДАЧИ..... 58
НОВЫЕ КНИГИ III

INHALT

Frau Mária Gyarmati (geb.: *Kocsis*): Die Erweckung des Anspruches auf den Beweis in der Grundschule 33
Dr. Kárteszi, Ferenc: Die Psychologie des Mathematiklernens 37
Dr. Bánfalvi, József: Die Entdeckung und Erziehung begabter Schüler im Unterrichtsfach Mathematik 42
Hoványi, Lajos: Ein Schnappschuß..... 44
Die Einführung der ETR in die POS der DDR 47
Lukács, Ottó: Der Unterricht der Zyklusorganisierung 51
AUFGABEN 58
NEUE BÜCHER III

GYARMATINÉ KOCSIS MÁRIA
tanár
Gombos Ferenc Általános Iskola, Győr

A bizonyítási igény felkeltése az általános iskolában

Bruner:
„A tanulni akarás olyan belső motívum, amelynek mind a belső forrása, mind a jutalma önmaga gyakorlásában van."

Emlékezzünk Pólya György egyik könyvének gondolataira!

A matematikai gondolkodást a kritika és a szabatosság jellemzi. Semmi sem igaz, amíg nincs bebizonyítva. A matematika tételeit a bizonyítások kötik az előző axiómákhoz, definíciókhoz és a többi tételhez.

Ha nem értjük a bizonyításokat, akkor éppen a rendszer lényege marad ki. Az egyszerű bizonyítások különösen hasznosak a megjegyzést és felidézést megkönnyítő eljárások szempontjából. Tehát egy csodálatos hasznuk is van, az emlékezetben tartást segítik. Indoklás nélküli szabályok hamar elfelejtődnek, hisz összefüggéstelen dolgokat mindenki sokkal nehezebben jegyez meg.

A bizonyítani tudás tehát mindenki számára hasznos.

A bizonyítási igény, készség és tudás kialakulásához azonban hosszú és nehéz út vezet, mert ez az igény is olyan, mint a tanulás, „amelynek mind belső forrása, mind jutalma önmaga gyakorlásában van."

Mit vár az általános iskolai tanterv ebben a témában?

Egyszerű bizonyítási feladatok elvégzését.

Számonkérését már nem.

Az általános iskolai matematika nem axiomatikus. Ennek ellenére a 8. osztályig bezárólag össze kellene állnia a tanulókban egy olyan képnek, amelynek értelmében megéreznek valamit abból, hogy léteznek:

a) különböző bizonyítási módok,

b) a bizonyításokkal kapcsolatban előfordulnak különböző fogalmak: axiómák, definíciók, tételek, tételfordítások, állítások helyességének eldöntése, intuíció, matematikai logika, mit jelent bizonyítani?

Egy egyszerű bizonyítási feladat elvégzése feltételezi tehát már általános iskolában is

1. matematikai alapfogalmak, definíciók, tételek biztos tudását,
2. logikus gondolkodást,
3. a bizonyítás mibenlétének ismeretét.

Néhány gondolat ehhez a három ponthoz.

Az elsőben felsoroltak nagyon fontosak, mert nélkülük nincs miről gondolkodnunk. Általános iskolai oktatásunkban az alapfogalmak, a definíciók, a tételek biztos tudása az, amit még számon is kérünk, s szemléletesen, sokoldalúan igyekszünk tanítani.

A másodikhoz: a tanterv követelményeinek is megfelelően, ítéleteket alkotunk, de az ítéletek, következtetések logikai szerkezetének vizsgálata elmarad, az ösztönös forma a jellemző. Ítéleteket összekapcsolunk, adott ítéletekből új, igaz ítéleteket alkotunk: tagadással „és"-sel, „vagy"-gyal, „ha..., akkor .."-ral; de a nyert ítéletek igazságértékét itt is „ösztönösen" döntjük el.

A harmadikhoz: amikor olyan részekhez jutottunk el matematikatanításunk során, hogy az előbb említett területeken tanítványaink nagy része jól teljesít, akkor tehetünk valamit a bizonyítás mibenlétének megismertetése területén.

Foglalkozzunk bizonyításos feladatokkal!

Minden esetben az egész osztállyal biztosan nem lehetséges, de differenciáltan szervezve az órát, vagy szakköri foglalkozásokon, jó néhány tanítványunknak adhatunk hasznos tudást.

Ügyeljünk viszont arra, hogy:

a) a feladat érthető legyen,

b) érezzék a tanulók a bizonyítás szükségességét,
érezzék, hogy kételkedésüket csak a logikai okoskodás s eddig tanult „kételkedésre" már okot nem adó ismereteik oldhatják meg,

c) a megoldás kevés lépésből felépíthető legyen,

d) tisztán lehessen látni, hogy az állítás igazságát bizonyítjuk be, vagy a tagadásáról, hogy hamis,

e) érezzék, hogy mikor elegendő egyetlen példa; mikor nem bizonyít még sok példa sem,

f) meg kell tanulniuk, hogy próbálgatások általában csak sejtést adnak. Ezek nagyon fontosak, de nem elegendők a megoldáshoz.

A tanulók életkori sajátosságai még középiskolában is határt szabnak, még inkább az általános iskolában.

Alsós osztályokban a tanulóknak bizonyításnak számít a hajtogatás; a mérés; algebrai feladatok megoldásánál a véges sok szám behelyettesítése akkor is, amikor ennél több szám a megoldás. Itt rászoktathatók már viszont arra, hogy kijelentéseikért vállalják a felelősséget.

Fogalmazzák meg, miért ezt tartják a feladat megoldásának! Ha nem tudnak indokolni, fogalmazzanak így: „úgy gondolom", „azt hiszem", „ez a sejtésem." Milyen csodálatos lenne, ha e kifejezések s a helyes eredmény után a fejekben a számunkra megfogalmazható logikai okoskodás hiányát jelző „Miért?" szó is csengne!

Mert ilyen esetben már nem a Tanító néni kedvéért megtanult kifejezések a korábbiak.

Felsőben a geometriai bizonyítások elképzelhetetlenek ábrák nélkül, puszta logikai levezetésekkel. A jó ábrát ez a korosztály bizonyításnak fogadja el. Meg kell mondani, mutatni, hogy ez nem az, s az ábráról leolvasott információk helyességét is mindig gondosan meg kell vizsgálni.

Nem egyszer találkozunk azzal is, hogy a bizonyítandó feladat sejtéséhez logikai okfejtést nélkülöző felismeréssel jutottak el, s ezt veszik bizonyításnak.

A természettudományi tárgyakban sokszor néhány tapasztalat alapján általános törvényeket fogalmazunk meg. Ezért lehetséges, hogy matematikaórán is néhány próbálgatást, kísérletet bizonyító erejűnek fogadnak el?!

Nézzük a pszichológiát erről a korosztályról!

Vizsgálódásai szerint: 11—15 év között alakul ki a tanulókban a formális gondolkodás, az „ítéletek logikája", amikor a gondolkodás szabályaival a tartalomra való tekintet nélkül is foglalkoznak. A gondolkodás erőfeszítéseit ilyenkor az ellentmondásmentesség logikai igénye hatja át. Felfogják már, hogy egyik tulajdonság a másikból következhet.

Felismernek bizonyos összefüggéseket, de nem látják magának a dedukciónak a jelentőségét. — Ez csak később kezd kialakulni.

Ez a fejlődési fok lehet már pszichológiai alapja a bizonyítási igény felébresztésének, az első, ilyen feladatokkal való próbálkozásoknak.

Hisz pszichológiai kutatások igazolták azt is, hogy a tanulók szemléletének magasabb szintre való fejlődése nem spontán folyamat.

A tanulást mindig úgy kell szervezzünk, hogy minden egyes szinten már a következőt készítsük elő.

Tudnunk kell azt is, hogy a hatékony módszerek meggyorsítják az egyes szintek elérését, de kihagyásukat egyik sem teszi lehetővé. Ezért számomra az volt a kérdés, hogy mely feladatokkal, milyen mélységben, hogyan próbálkozzam a szakkörön és az órán, differenciált foglalkozáson.

Néhány feladat közülük:

Bizonyítsd be, hogy öt, egymást követő természetes szám szorzata osztható 120-szal!

Általános iskolában nagyon sokan az első szó után leteszik a ceruzát, vagy nagyon elkeserednek, mert nem tudnak mit kezdeni a feladattal. Nekik segítenék pl. írásvetítő fóliájára írt feladatlap segítségével, a következő utasítással:

Jegyezd le a feltételeket, az állítást, és keresd meg a bizonyítás helyes logikai sorrendjét!

Feltétel:

Állítás:

Bizonyítás:

1. Tehát az öt szám szorzata osztható 120 mindegyik törzstényezőjével, emiatt 120-szal is.
2. Öt egymás utáni természetes szám közül kettő biztosan osztható 2-vel.
3. Találunk az öt szám között olyat is, amely 3-mal, és olyat is amely 5-tel osztható.
4. Az egyik ezek közül 4-gyel is.
5. $120=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5=2^3\cdot3\cdot5=2\cdot4\cdot3\cdot5$ (Megoldás: 5-2-4-3-1)

Ha a fóliát felszabdaljuk, akkor az nagyon gyorsan átrendezhető, s együtt a bizonyítás. Ugyanez felhasználható úgy is, hogy a helyes logikai sorrendnél lépéseket hagyunk ki, s a tanulók azokat próbálják megtalálni.

Ugyanennél a feladatnál segíthetünk másféleképpen is, egy másik feladatlap segítségével:

Egészítsd ki!

Feltétel:

Állítás:

Bizonyítás:

1. 120= = =
2. Öt egymás utáni természetes szám közül kettő biztosan osztható .....-vel.
3. Az egyik ezek közül .....-gyel is.
4. Találunk az ..... szám között olyat is, amely .....-mal, és olyat is, amely .....-tel osztható.
5. Tehát az ..... szám szorzata osztható ..... mindegyik .....-vel, azaz .....-szal is.

Ha van már néhány hasonló feladatunk, akkor azt is kérhetjük a tanulóktól, hogy a megadott bizonyítások közül keressék meg a kijelölt feladatét, vagy fordítva.

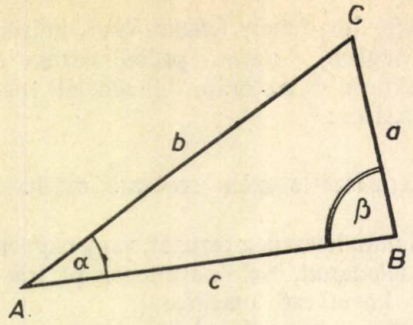
Egy geometriai feladat.

Igazold, hogy a háromszögben a hosszabbik oldallal szemben nagyobb szög van, mint a rövidebbel szemben!

Hasznos az is, ha előbb összegyűjtjük, hogy milyen ismereteket használhatunk fel a bizonyításhoz, s azokat bizonyítottuk-e már. Lesz tanítványunk, aki innét már egyedül tud tovább dolgozni, a többieknek az előzőhöz hasonlóan segítenék.

Keresd meg a helyes logikai sorrendet, miután lejegyezted az állítást!

Feltétel: $b>a$.

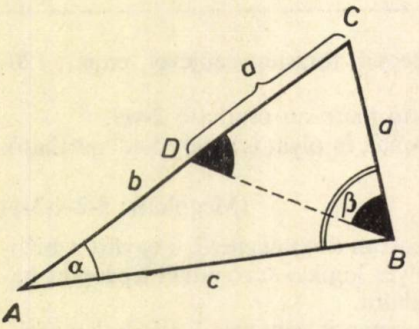


Állítás:

Bizonyítás:

1. A keletkezett *BCD* háromszögnek két oldala egyenlő, tehát a fekete szögek is egyenlők.
2. β pedig még a fekete $\sphericalangle$-nél is nagyobb, hiszen magában foglalja azt.
3. Mérjük fel *a*-t a *b* oldalra!
4. Tehát $\beta > \alpha$.
5. A *D*-nél levő fekete $\sphericalangle$ az *ABD* háromszögnek külső szöge, ezért biztosan nagyobb mint α.

(Megoldás: 3-1-5-2-4)



Nehezebb a feladat, ha a rajz kiegészítését és a bizonyítás lépéseinek kiegészítését kérjük.

Mindig figyeljünk tanítványainkra, nehogy a nagyon nehéz feladatoktól teljesen elkedvetlenedjenek!

A bizonyítás ügye azzal is nyer, ha egy feladatot meghatározó feladatként oldunk meg, majd alkalmas időben bizonyítandó feladatként foglalkozunk vele.

Egy kockával kétszer dobunk és a dobott számokat összeadjuk. **Mennyi** *a legvalószínűbb összeg, és* **mennyi** *a legkevésbé valószínű?*

Bizonyítsd be, hogy ha *egy kockával kétszer dobunk és a dobott számokat összeadjuk,* **akkor** *a legvalószínűbb összeg a* **7**, *a legkevésbé valószínű pedig a* **2** *és a* **12** *lesz*!

A kettő együtt segít eligazodni a bizonyításos feladatok szerkezetében, s jó kapocs a gyakrabban megoldott feladattípushoz.

Bizonyos vagyok abban is, hogy az indirekt bizonyítás nyer ilyen egyszerű feladatok szóbeli megoldásakor:

Egy háromszögnek csak egy derékszöge lehet?

Egy háromszögnek nem lehet egynél több tompaszöge?

Ezek a bizonyítások ugyan nem minden esetben „igazi" matematikai bizonyítások, de hiszem, hogy tovább fejlesztve azokká tehetők.

Nem várható általános iskolában a bizonyítási igénynek, készségnek, gyakorlatnak az a szintje, amely a középiskolai és felsőbb iskolai ismeretanyagon alakulhat ki.

Ha valaki sohasem akarta tépés utáni összeillesztéssel vagy hajtogatással „bebizonyítani", hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°, vagy sohasem vett részt ilyen „szubjektív" bizonyításban, vagy egy pillanatra sem hitte, hogy véges számú próbálgatásával megoldotta az „igazold" kezdetű feladatot, az véleményem szerint nehezen fogja elhinni, megérteni, hogy a logikai okoskodás az igazi. A bizonyításhoz visz közelebb az a szituáció is, amelyet tanítványaink teremtenek önmaguknak, amikor pl. a háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontját szerkesztik. A körző-

jükbe, kezük pontosságába vetett „hitet" csodálkozva cserélik fel a logikai okoskodással, mert egyszer egyetlen pont, majdnem egyetlen pont a „szerkesztésük" eredménye, s ők már szeretik tudni a bizonyosat.

Nem hiszem, hogy ezt, az általános iskolai ismeretanyagon kialakítható igazolási, bizonyítási, ellentmondásmentességi igényt, ha van, nem érdemes megtartani, tovább fejleszteni már itt, ha lehetséges, természetesen úgy, hogy további tanulmányaik során egy tudomány bizonyítási igénye, készsége, majd gyakorlata alakulhasson ki rajta.

Ez viszont csak feladatok megoldásával lehetséges.

DR. KÁRTESZI FERENC
ny. egyetemi tanár
Budapest

A matematikatanulás lélektana

R. SKEMP szavait idézem: *„A tanulás és a tanítás problémái pszichológiai problémák."* Tudja ezt minden tanár vagy legalábbis sejti. A tanulnivaló megértése a tanulási folyamat legfontosabb mozzanata. A megértés fogalmának tisztázása, valamint a megértés kialakulásának alapos ismerete a tanítás megjavításának elengedhetetlen előfeltételei. A mondott lélektani témakörben csak nagyon szerény ismerettel rendelkezünk. A tanulás folyamatával és a megértés jelenségével foglalkozó tudományos vizsgálatok még kezdetlegesek, és az abban elért eredmények az iskolai tanításban alig hasznosíthatók. *Az értelmet fejlesztő eljárások ma is a hagyományokon és az oktatók egyéni véleményein alapulnak — mind az iskolában, mind az egyetemen — tudományos ismeretek helyett.*

A tanár szükséges lélektani műveltsége, szorosabb értelemben fejlődéslélektani felkészültsége a tanítási problémák megoldásában, a hatékony módszer megtalálásában döntő szerepet játszhat. A fejlődéslélektani tudás és rendszeres tapasztalatgyűjtés a tanuló értelmi fejlődésének helyes értékeléséhez is szükséges. A tanuló fejlődésének értékeléséről szólva A. Z. KRYGOWSKA egy elbeszélése jut eszembe.

Olyan osztályt látogatott meg, amelyet lelkes, ügyes fiatal tanárnő tanított. Geometriai téma volt a tanóra anyaga, pontosabban annak a bizonyítása, hogy az euklideszi párhuzamossági axiómából következik: a háromszög szögeinek összege 180°. A tanárnő okosan irányított kérdései aktivizálták az osztályt, s a tanulók szinte a maguk erejéből rátaláltak a helyes okoskodás útjára. Ez megerősítette a tanárnő ama feltevését, hogy a tanulók már érettek arra, hogy a deduktív tárgyalást megértsék, előnyét belássák, és minden új tudnivaló tárgyalásánál a deduktív menetet igényeljék.

KRYGOWSKA azonban figyelmeztette a tanárnőt, hogy az a feltételezett deduktív okoskodási szint érése még csak elkezdődött, de egyelőre nem ért véget. Ugyanis a levezetés befejezése után minden tanuló körző és vonalzó használatával szerkesztett modellen ellenőrizte, hogy teljesül-e a „szögösszeg = 180°" tulajdonság. Szükségük volt az értelmes tapasztalatból fakadó evidenciaélményre. Továbbá — amint KRYGOWSKA megjegyezte — a deduktív okoskodás nem a tanulók fejéből pattant ki, hanem a tanár kérdésekbe rejtett közléseit megértve vált aktivizáló forrássá. Hátravan még a gondolkodás fejlesztésének az a szakasza, amelyben a tanuló már a maga erejéből észreveszi a deduktív okoskodás szükségességét és annak célravezető módját. Tehát nem egy közölt dedukció követése és megértése az elérendő tudásszint, hanem a deduktív tevékenység elsajátítása. Midőn

az érettség ezt a fokot is eléri, a tanuló a matematikát nem érzi érthetetlenül nehéznek.

HAJÓS GYÖRGY még kisdiák volt, amikor először találkoztam vele. Koraérett, éleseszű gyerek volt. Afféle „csodagyerek" (ha matematikai tehetségét és nyelvtudását tekintem). Családi környezete a tehetséges gyermek szellemi fejlődését döntő módon befolyásolta. A család nagyon gazdag volt. Apja kúriai bíró volt. Édesanyja CLARK NELLI, a híres hídépítő dédunokája. Apai ágon is neves rokonsága volt. Volt közöttük két egyetemi tanár (egy matematikus és egy jogtudós), egy neves író, egy filmrendező. A HAJÓS gyerekek nagyon gondos nevelésben részesültek. Mindezeket azért bocsátom előre, hogy HAJÓS egy visszaemlékezését kellő nyomatékkal elemezzem. Idézem — ha nem is szó szerint — az ő elbeszélését.

„9 éves lehettem, amikor már szemléletes szinten elég sokat tudtam geometriából. Elhatároztam, hogy könyvet írok. Vastag kockás füzetet szántam erre a célra. Ma is emlékszem az első fejezet egy részletére: „A háromszög szögeinek összege 180°. Rajzolj egy háromszöget! Tépjed le a három sarkát! Rakd azokat szorosan egymás mellé! Így, ahogyan a rajzon látod. Ugye igaz, amit állítottam." Nem sok idő múlva abbahagytam a könyvírást, mert nagybátyámtól egy német nyelvű, érdekes, geometriai tárgyú könyvecskét kaptam. Akkor rájöttem, hogy én még egyelőre olyan okos könyvet nem tudok írni, tehát abbahagytam."

HAJÓS ezt annak az állításnak indoklása kapcsán említette, hogy az absztrakt, deduktív tárgyalás megértésére a 8—10 éves gyermek még nem érett, azonban szemléletes szinten, ha érdeklődik, sok geometriai ismeretet el tud sajátítani.

Egy nemzetközi kongresszuson a deduktív szint túl korai bevezetéséről zajló vitában mondta R. CALAPSO professzor: „A magasabb szint túl korai erőltetésével úgy jár majd a lelkes újító, mint az a jóakaró, aki a csecsemőt szalonnával akarta etetni."

Egy belga professzor a matematikatanítás korszerűsítésével foglalkozott (iskolai kísérlet keretében). Szuggesztív tanári egyéniség, aki a 10—11 éves gyerekekből álló kísérleti csoportot rávezette annak a felfogására, hogy *a sík: egy ponthalmaz; a sík egyenesei: a mondott ponthalmaznak bizonyos tulajdonságokkal bíró részhalmazai.* A tulajdonságok a következők:

A síknak nevezett ponthalmaznak bármelyik pontja vagy eleme egy egyenesnek nevezett részhalmaznak, vagy nem. Két pont egy és csak egy egyenesnek pontja. Két egyenesnek vagy van közös pontja, vagy nincs — persze két közös pontjuk nem lehet, mert akkor nem különbözők.

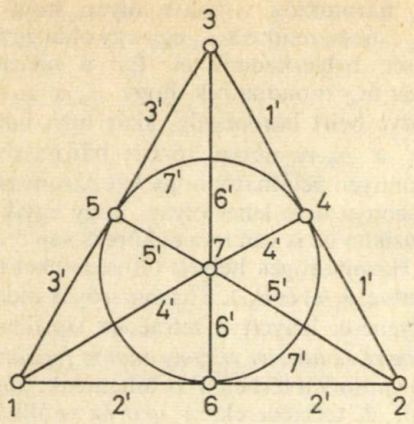
Úgy látszott, hogy mindezeket megértették a gyerekek. Egyszerű fogalmazásban előadták és a maguk módján meg is magyarázták. A kísérletező professzor megnyugvással vette tudomásul, hogy a tanulók már képesek a deduktív tárgyalást követni, tartalmát felfogni.

L. LOMBARDO RADICE professzor azonban vitatta a kísérlet sikerességét, mondván, hogy a tanulók megértették a kérdések szuggesztív sorozatába csomagolt információkat, de ez még nem élő tudás, mert még nem vált saját gondolkodásukat befolyásoló tényezővé. Igazolhatnánk ezt egy újabb kísérlettel.

Olyan szokatlan, de egyszerű modellt választunk, amely a sík pontjairól és egyeneseiről mondott követelményeknek eleget tesz.

A számjegyekkel megnevezett 7 pontból álló halmazt tekintjük. A hét ponthármast, amelyet egy-egy számozott vonal fűz fel, tekintjük egyeneseknek.

Én is kísérleteztem a belga mintára, ugyanolyan korú gyerekekkel. A sík eképpen elvont értelmezését a gyerekek (éppen úgy, mint a belgák) felfogták. Ámde midőn az 1. ábrán látható geometriai struktúrát mutattam, nem vették észre, hogy az a síkról mondott követelményeknek eleget tesz. Pontosabban: rá-



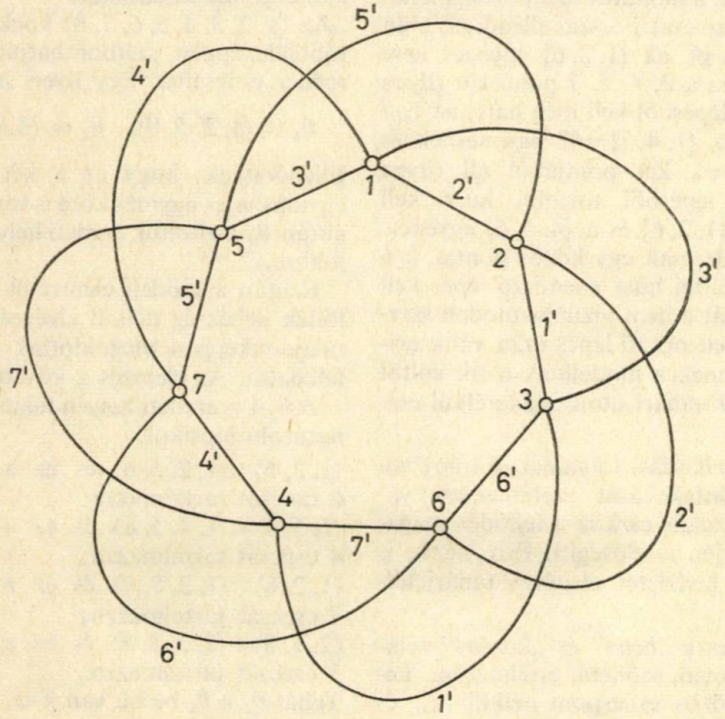
vezető kérdésekkel, lassan-lassan ráismertek.

Fokozatosan tudatosodott, hogy a modell 7 pontból álló ponthalmaz; e ponthalmazból a 7 számozott vonal mindegyike egy háromelemű részhalmazt emel ki, és azokat tekintjük egyeneseknek; bármelyik egyenest tekintve még 4 olyan pont van, amelyik nem eleme annak az egyenesnek; pontosan 21 egyenespár képezhető a 7 egyenesből, és a bármelyik párt alkotó két egyenesnek egy közös pontja van; bármelyik két pont egy és csak egy egyenesnek eleme; bármelyik pont 3 egyenesnek is pontja.

Midőn eddig jutott a csoport, azt hittem, hogy az új ismeret kezd a tanulók tudatában élő tényezővé válni. Csalódtam, mert a tanulócsoport egy korábban érő tagja, akinek verbális gondolkodását, kifejező készségét már régebben észrevettem, meglepő kérdéssel állt elém: „Az egyenesek szerintem egyformák. A modell 7' nevű egyenese nem olyan, mint a többi hat. Jó ez a modell?"

Meg kellett magyaráznom, hogy a fogalmat meghatározó tulajdonságok teljesülését kell vizsgálnunk. Az irreleváns (lényegtelen) tulajdonságokat nem veszszük figyelembe. A 7' jelű kör csak annak kiemelésére való, hogy a {4, 5, 6} részhalmazra gondolunk. Vagyis a kör nem tulajdonsága, hanem csak megjelölője a szóban forgó elemnek.

Ebből láttam, hogy az absztrakt, de-



duktív okoskodás még nem élő, nem érett eleme a tanulók értelmi fejlettségének.

Bennem is kétkedés ébredt: vajon nem elhamarkodott ítélet az, hogy még messze van a tervezett tudásszint? Hátha az inkább mesterkélt, mint beszédes modell okozta a tanuló gondolkodásának elbizonytalanodását?

Másik tanulócsoporttal megismételtem a kísérletet, azonban más modellt használtam.

Itt az egyeneseknek tekintett ponthármasokat egyforma vonalszakaszok emelik ki: 1', 2', ..., 7'. Ezzel a modellel sem volt kedvezőbb a helyzet. Csakis a rávezető tanári kérdésekkel jutottak addig, hogy a modell egy (projektív) síkot reprezentál.

Persze vizuális modell nélkül is tárgyalható ugyanaz a téma. Sík = az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ halmaz, elemei pontok. A sík egyenesei = az $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 4, 7\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{3, 6, 7\}$, $\{4, 5, 6\}$ részhalmazok. Ez a nem vizuális modell rendelkezik a mondott tulajdonságokkal. Ezt azonban csak hosszas ellenőrzés után látták be: pl. az $\{1, 2, 6\}$ egyenes nem tartalmazza a 3, 4, 5, 7 pontokat (ilyen ellenőrző lépésből kell még hat); az 1, 7 pontpár az $\{1, 4, 7\} = 4'$ egyenesnek és csakis ennek két pontjából áll (ilyen ellenőrző lépésből további húsz kell még); az $\{1, 2, 6\}$ és a $\{4, 5, 6\}$ egyenesnek van, de csak egy közös pontja, a 6 (ilyen, további húsz ellenőrző lépés kell még). Tehát e nem vizuális modell szerkezete 49 ellenőrző lépés után válik evidenssé. Ennek a modellnak a sík voltát sem tudták tanári útmutatás nélkül észrevenni.

A gondolkodási folyamat jó irányban való kibontakozását szerencsésen választott vizuális eszköz a fejlődés magasabb szintjén is elősegíti. Erre nézve is végeztem kísérletet elsőéves tanárjelöltekkel.

Ismeretes a „*beírt*" és „*köréírt*" reláció következő, szűkebb értelmezése. Legyen a közös csúcspont nélküli $\triangle_1$ és $\triangle_2$ háromszög viszonya olyan, hogy a $\triangle_2$ csúcsai rendre a $\triangle_1$ egy-egy oldalegyenesén helyezkednek el! Ezt a relációt akár úgy mondhatjuk, hogy $\triangle_2$ a $\triangle_1$-re nézve beírt háromszög, akár úgy, hogy $\triangle_1$ a $\triangle_2$-re nézve köréírt háromszög. Könnyen belátható, hogy két háromszög viszonya nem lehet olyan, hogy egyik a másikba be is van írva és köré is van írva.

Háromszögek helyett tetraédereket tekintve, θ_1-et és θ_2-t, a háromszögek oldalegyenesei helyett a tetraéder lapsíkjait, *a beírt és köréírt viszony analóg fogalmához* jutunk a térben. Azt hihetnénk, hogy a θ_1, θ_2 tetraéderekre is igaz az az állítás, hogy θ_2 nem lehet a θ_1-be is és a θ_1 köré is írva. Tessék ezt megcáfolni! Ezt tűztem ki feladatul a tanárjelölteknek.

Annyit hamar kisütöttek, hogy elegendő előállítani olyan két tetraédert, amelyek egyidejűleg egymásba és egymás köré írt viszonyban vannak. További tíz perc múltán még nem sikerült ilyen θ_1, θ_2 tetraéderpárt előállítaniuk. Ekkor a következő útbaigazítással segítettem elakadt gondolkodásukat.

„Az $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\rangle$ kocka csúcsait többféleképpen szétbonthatjuk két tetraéder csúcsaivá. Egy ilyen szétbontás:

$$\theta_1 = \langle 1, 2, 5, 8\rangle, \quad \theta_2 = \langle 3, 4, 6, 7\rangle.$$

Ellenőrizzük, hogy ez a két tetraéder egymásba és egymás köré is van írva! (Az ábrán θ_2-t eltoltuk eredeti helyéből kissé jobbra.)"

Ezután a modell elemzését a tanárjelöltek nehézség nélkül elvégezték; ezzel tulajdonképpen megoldották a kitűzött feladatot. Az elemzés a következő:

A θ_2-t is eredeti helyén tekintve a θ_1-et határoló lapsíkok:

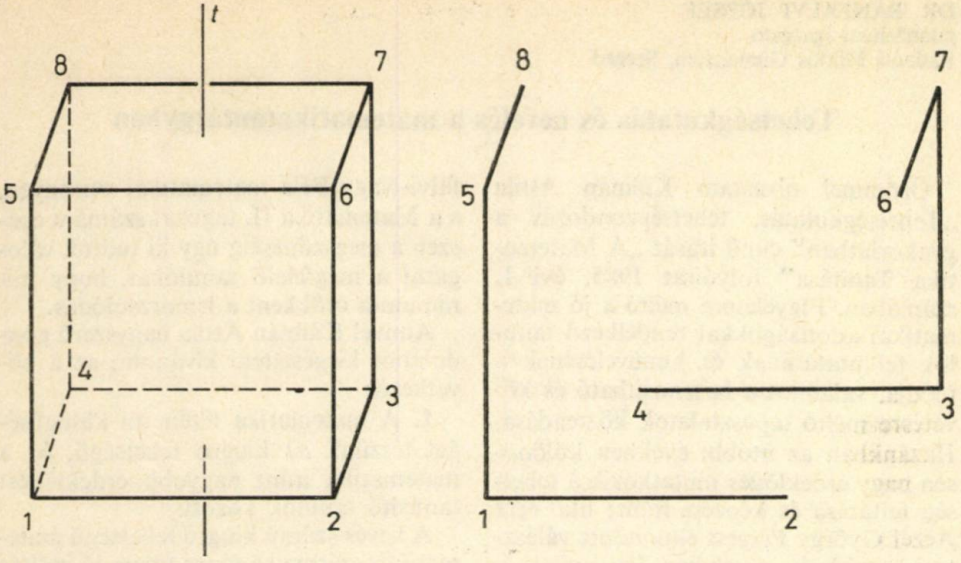
$\langle 1, 2, 5\rangle = \langle 1, 2, 5, 6\rangle$ és ez a θ_2-nek a 6 csúcsát tartalmazza;

$\langle 1, 5, 8\rangle = \langle 1, 4, 5, 8\rangle$ és ez a θ_2-nek a 4 csúcsát tartalmazza;

$\langle 1, 2, 8\rangle = \langle 1, 2, 8, 7\rangle$ és ez a θ_2-nek a 7 csúcsát tartalmazza;

$\langle 2, 5, 8\rangle = \langle 2, 3, 5, 8\rangle$ és ez a θ_2-nek a 3 csúcsát tartalmazza.

Tehát θ_2 a θ_1-be be van írva.



Hasonlóképpen a θ_2 lapsíkjait tekintve: a $\langle 3, 4, 7\rangle = \langle 3, 4, 7, 8\rangle$, $\langle 3, 7, 6\rangle = \langle 2, 3, 7, 6\rangle$, $\langle 3, 4, 6\rangle = \langle 3, 4, 5, 6\rangle$, $\langle 4, 6, 7\rangle = \langle 1, 4, 6, 7\rangle$ lapsíkok rendre a θ_1 tetraéder 8, 2, 5, 1 csúcsát tartalmazzák. Tehát θ_2 a θ_1 köré van írva. És ezzel befejeztük a háromszögekre vonatkozó állítás analóg megfelelőjének cáfolását.

A verbális gondolatmenet megtorpanása esetén is jó szolgálatot tesz a vizuális eszköz, a szerencsésen kiválasztott, esetleg megszerkesztett modell. Azonban nem tanítják meg a diákot arra, hogyan lehet előállítani önerejéből az ilyen vizuális munkaeszközt. A hagyományos tanítás az ilyen vizuális munkaeszközt készen adja a tanulónak, ami kevésbé fejlesztő hatású.

Az én kísérletemben is készen kapták az eszközt, a tanulók csak a modell elemzésével végeztek önálló mentális tevékenységet. Én azonban akkor nem önálló gondolkodásuk fejlesztését tűztem ki célul, hanem csak a vizuális eszköz gondolkodásra kiható erejét akartam megmutatni.

További tények felfedezését is lehetővé teszi ez a vizuális modell. A t egyenes a kocka alsó és felső lapjának középpontját köti össze. Látható, hogy a kocka t körüli félforgása (180°-os elforgatása) θ_1-et θ_2-be és θ_2-t θ_1-be viszi át.

Másfél évszázada fedezte fel MÖBIUS, hogy két tetraéder lehet egyidejűleg egymásba és egymás köré írt helyzetben. Ezért az ilyen tetraéderpár alkotta alakzatot *MÖBIUS-féle konfigurációnak nevezik.*

* * *

Közleményem célja annak érzékeltetése és tudatosítása volt, hogy a tanulás és tanítás folyamatában a fejlődéslélektani meggondolásoknak döntő fontosságú szerepük van.

A matematika alapos tudása szükséges a jó tanári munkához, de a lélektani műveltség és tapasztaltság legalább annyira fontos.

A megértés folyamatát, valamint a megértést mint élményt a pszichológusoknak a matematikatanárokkal együttműködve kellene még tovább tanulmányozni. Szerintem e téren még kevés és alig hasznosítható ismerettel rendelkezünk.

DR. BÁNFALVI JÓZSEF
gimnáziumi igazgató
Radnóti Miklós Gimnázium, Szeged

Tehetségkutatás és nevelés a matematikatantárgyban

Örömmel olvastam Kálmán Attila „Tehetségkutatás, tehetséggondozás a gyakorlatban" című írását „A Matematika Tanítása" folyóirat 1985. évi 1. számában. Figyelemre méltó a jó matematikai adottságokkal rendelkező tanulók felkutatásának és kiművelésének a módja, valamint a hasznosítható és követésre méltó tapasztalatok közreadása. Hazánkban az utóbbi években különösen nagy érdeklődés mutatkozik a tehetség feltárása és képzése iránt; utal erre Aczél György Pécsett elmondott választási beszéde is, amelyben így nyilatkozott: „Minden emberben van valamilyen tehetség, segítenünk kell annak felszínre kerülését." Kálmán Attila írása is azt bizonyítja, hogy hazánkban az elmúlt négy évtizedben a nevelés tömegessé válásával népességünk műveltségi szintje jelentősen emelkedett, s általa a társadalom részéről is megteremtődött az iskolai képességfejlesztés, a szellemi tartalék felszínre hozása iránti igény. Ez ugyan nem jelenti azt, hogy a tehetségnevelés addig is kívül esett volna a nevelői-szaktanári munka területén, — amit lényegében Kálmán Attila cikke is bizonyít —, de számtalan megjelent írás utal arra, hogy nem mindenütt és mindig talált megértésre a tehetségekkel való „kiemelt" foglalkozás, amelyet többek között az „elit iskola" vitája is bizonyít.

A Kálmán Attila által felsorolt tehetségnevelési módok nálunk, a szegedi Radnóti Miklós Gimnáziumban is jónak bizonyultak. Mi is rendeztünk évenként a szegedi és Szeged környéki 8. osztályos tanulók számára tehetségkutató tanfolyamokat, amelyeken mintegy 100—110 fő vett részt. Szerveztünk versenyre felkészítő szakköröket, évfolyamszintű versenyeket, indultak tanulóink a megyei középiskolák számára szervezett Szőkefalvi-Nagy Béla matematikai versenyen, s a Matematika II. tagozat számára egészen a megszűnéséig úgy ki tudtuk válogatni a megfelelő tanulókat, hogy minimumra csökkent a lemorzsolódás.

Amivel Kálmán Attila nagyszerű gondolatait kiegészíteni kívánom, az a következő:

1. A matematika terén mi különbséget teszünk *a)* kiugró tehetségű, *b)* a matematika iránt nagyobb érdeklődést tanúsító tanulók között.

A kevés számú kiugró tehetségű matematikus szárnyal a maga útján, jó indítás és irányítás után előbb-utóbb a megfelelő szakember kezébe kerül, s a legtöbb esetben már maga a család is útnak indítja. Amire azonban nagyon oda kell figyelnünk, az a „tartalékot" jelentő, a matematikát kedvelő és iránta nagyobb érdeklődést tanúsító tanulók csoportja. Ezeket a tanulókat kell „felfedezni", és tehetségük kibontakoztatása érdekében olyan megoldást keresni, amellyel a tanulók képességének és tehetségének feltárását folyamatosan elősegítjük, s a fejlődést állandó jelleggel figyelemmel kísérve, új lehetőségek biztosításával elérjük, hogy egyetlen, jobb matematikai adottságokkal rendelkező tanuló se vesszen el a középiskolában. Természetesen a képességfejlesztés során találkozunk olyan fiatalokkal, akik egy bizonyos szintnél nem tudnak továbbjutni, s más terület felé orientálódnak, és lesznek, akik gyors fejlődés révén nagyszerű eredmények elérésével biztatnak, akiket azután a számukra kedvező úton el kell indítani. A döntő többséget azonban a kiválasztottak közül a nem kiugró tehetségű, de a matematikát szerető, megbízható alapképzettséggel rendelkező tanulók teszik ki. Ezekből lesznek később a tehetséges mérnökök, tanárok, egyszóval a jó ma-

tematikai felkészültséget igénylő pályák biztos utánpótlásai. Akik most bizonyos pályák területén — a felsőoktatási intézetekbe való irányulás adatai szerint — „hiánycikkek". Mi szorosan véve ilyen tehetségfeltárásra és nevelésre gondolunk, s lényegében ezt értjük a matematikaoktatás keretében a „szellemi tartalék" feltárásán, és erre kell a tehetségnevelés frontján az eddiginél nagyobb figyelmet fordítani.

2. Az elmondottakból már következik, hogy mi a tehetségek nevelését nem „elkülönítve" óhajtjuk megoldani. A tehetségek a tömeges képességfejlesztés bázisán bontakoznak ki, azután segítségünkkel és ösztönzésük révén önmagukat is tovább fejlesztik.

3. A matematikai képességek (tehetségek) kibontakoztatását mi az úgynevezett „Előrehozott vizsgájú matematika tagozat" révén kívánjuk a gimnáziumban megvalósítani. Ennek lényege röviden a következő: a tanulók az I—II. osztályban heti 2 órával nagyobb óraszámban tanulják a matematikát, s a III. osztályban ugyancsak 2—3 többletórát biztosítunk hetenként a haladáshoz. Ilyen óratöbblet, tanári segítés és otthoni önálló munka révén lehetővé tesszük számukra, hogy a III. osztály befejeztével, illetve augusztus végén levizsgázzanak a IV. évfolyam anyagából, s a IV. osztályban külön csoportban, speciális foglalkozás keretében folytassák tanulmányaikat.*

(Természetesen a tanulók a régi osztályközösségben maradnak, csupán a speciális matematika, valamint a fakultatív foglalkozás tárgyait hallgatják külön csoportban.) E külön (speciális) foglalkozások keretében — amelyet kiválóan felkészült szaktanárok tartanak, vagy a csoport színvonalához mérten esetleg egyetemi vagy főiskolai oktatók is segítenek, — a tanulók felkészülnek a felvételi vizsgákra, az országos tanulmányi versenyekre stb., nem utolsósorban életpályájukra.

4. Az ismertetett megoldás a fakultációs rendszer keretében történik, ezért egyben annak továbbfejlesztését is szolgálja. A fakultációs rendszerhez való kötődést az is bizonyítja, hogy a tanulók a III. osztályban ugyancsak tantárgycsoportot választanak, s ha valakinek nem sikerül a vizsga révén a „kiemelt" csoportba jutnia, vagy időközben megváltoztak elgondolásai, akkor a fakultációs tantárgycsoportban folytathatja tanulmányait. Vesztes tehát nincs.

Az „Előrehozott vizsgájú matematika tagozat" az 1985/86. tanévtől indult iskolánkban. Az érdeklődés az általános iskolai 8. osztályos tanulók között a vártnál jóval nagyobb volt iránta.

5. Feltétlenül fel kell hívni a figyelmet a matematika szaktárgy területén az iskolai munkaközösség-vezető személyének fontosságára. Az arra szakmailag alkalmas, lelkes, a tantárgyát szerető munkaközösség-vezető nagyszerű eredmények elérésére buzdíthatja a kollektívát.

Természetesen sokat számítanak a külső körülmények is. Nagyon sok múlik például az általános iskola stabilitásán, felkészítő munkáján. Nem lebecsülendő tényező, a kiválóan dolgozó tanulók munkájának iskolaszintű megbecsülése, elismerése. Végezetül: érdemes lenne azon is gondolkozni, hogy e külön munkára vállalkozó, szorgalmas, és szép eredményt elérő tanulókat az érettségin vagy a felvételi vizsgán miként tudnánk még külön is honorálni.

---

* Vö.: Bernáth József, Habermann M. Gusztáv, Mihály Ottó, Páldi Ottó, Páldi János: A gimnázium korszerűsítésének egy lehetséges alternatívája: a szolnoki Varga Katalin Gimnázium kísérleti terve (1981—1985). Neveléselmélet és Iskolakutatás. Bp. I. ért. 1. szám 46—65. oldal.

HOVÁNYI LAJOS
tanszékvezető főiskolai docens
Tanítóképző Főiskola, Zsámbék

Pillanatfelvétel

Nekünk, gyakorló pedagógusoknak megadatik, hogy valami szép, nagy egészből a tanításnak, szaktárgyunknak a munkakörünkhöz tartozó részét egyre jobban és mélyebben ismerjük meg. Tudói leszünk egy-egy korosztály sajátos gondjainak. Egyetlen, tartós munkahely megajándékoz a helyi ismeretek többletével és a tapasztalati úton ezért megválaszolhatatlan kérdéssel: milyen a rész viszonya az egészhez? Aki elmozdul munkahelyéről, az más iskolatípusokat is megismer, talán többet lát az egészből. Persze az egészet egyszerre látni majdnem lehetetlen, annak inkább csak egy szelete, keresztmetszete villan fel. Ezt ragadjuk meg és tesszük hozzá ahhoz a valódi részhez, amelyet mindennapi munkánk során módunk van jobban megismerni.

Lehet, hogy az oktatásügyben is érvényes valami átfogalmazott heisenbergi bizonytalansági reláció? Aki ura a hétköznapok pedagógiájának és a tanítás gyakorlatának, annak homályos az áttekintése a tudományok és az oktatáspolitika végtelenjeiben; aki pedig magas szinten műveli a szaktudományokat, és talán ezért beleszólhat az oktatáspolitika hosszú távú döntéseibe, az pontatlanul ismeri a tanórákat megtartó pedagógus közkatonák hétköznapi keserveit?

Bizonyára nem vagyok az egyetlen, aki néha, rövid idő alatt sokrétű, érdekes tapasztalatokat szerezhet. A birtokunkba jutott információkkal több minden történhet: eltemetjük, megőrizzük, mi magunk felhasználjuk és értékesítjük, esetleg tovább adjuk tanulságként. Én ez utóbbit teszem még akkor is, ha tudom, hogy tapasztalataimmal, észrevételeimmel kollégáim egy részének nem szolgálok meglepő újdonsággal.

Az 1984/85-ös tanév végén 2 hónap leforgása alatt szinte a teljes tanulói korosztály tudásába, teljesítményébe nyerhettem bepillantást: részt vettem egy általános iskolai matematika-felmérésben, gimnáziumi érettségi, majd főiskolai államvizsga bizottsági elnöki feladatokat láttam el, végül felvételi vizsgázókat hallgathattam meg, megkísérelve, hogy megállapítsam matematikatudásukat. Mindezt hozzáadva és összevetve azokkal a tapasztalatokkal, amelyeket soksok éves tanári pályámon — általános iskolában, gimnáziumban és a felsőoktatásban — empirikusan gyűjtöttem, kísértést érzek, hogy egy kiragadott, de szerintem jellemző tünetet és gondolatsort megosszak másokkal.

Tudom, a „minta", amelyet vizsgálok, nem reprezentatív. Nem várható el senkitől, hogy az eredményt elfogadja általános helyzetként. Sejtésem mégis az, hogy az a kép, amelyet kaptam, és melyet most részben továbbadok, nem a kedvezőtlen póluson helyezkedik el, hanem az átlagosak széles intervallumának valamelyik pontján.

Sajnálom, hogy a szerzett információkból csak az adatok adhatók tovább. Számomra ezek többek puszta statisztikáknál, mert figyelhettem a tanulókat, maturandusokat, felvételizőket, államvizsgázókat munka közben. Láthattam arcukat, tekintetüket, amelyek sokat elárulnak és visszatükröznek a megértésből, a gondolkodási folyamatból. Megfigyelhettem töprengéseik, tévedéseik okát; logikájuk vagy logikátlanságuk mechanizmusát. Mindezek élőbbé, emberibbé és teljesebbé teszik az összképet.

Az általános iskolai felmérés egy adott iskola alsó tagozatán teljes körű volt. (Érdekes és tanulságos lett volna elvégezni a mérést a felső tagozaton is.) A dolgozatot 350 tanuló írta meg. A feladatok az alsó tagozatos tananyag fő fejezeteiből álltak: halmazok, logika, számtan, al-

gebra, relációk, függvények, sorozatok, kombinatorika. A tanulók terhelhetőségére és a munkaidőre való tekintettel egyik évfolyamon sem kértük a teljes „repertoárt". Viszont minden osztályban vizsgáltuk a számolási készséget.

Itt most csak e feladatsort mutatom be.

1. osztály: Írj az alábbi feladatokban a kérdőjel helyére vagy mellé kisebb, nagyobb vagy egyenlőségjelet úgy, hogy igaz állítások legyenek!

$$2+7 \;?\; 6 \qquad 12+6 \;?\; 6+12$$

$$12-6 \;?\; 12-7 \qquad 15-7 \;?\; 5+3$$

2. osztály: Végezd el a kijelölt műveleteket!

$$23+4\cdot 8 = \qquad 5\cdot 7+3\cdot 7 =$$

$$77-7\cdot 7 = \qquad (32+24):8 =$$

$$60-20-18 = \qquad 60-(20-18) =$$

3. osztály: Végezd el ki a kijelölt műveleteket!

$$\begin{array}{r} 456 \\ 48 \\ +932 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 623 \\ -257 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 269\cdot 7 \\ \hline \end{array}$$

4. osztály: A kijelölt műveletek eredményét írd az egyenlőségjel jobb oldalára!

$$13+0 = \qquad 13-0 = \qquad 0-13 =$$

$$672\cdot 1 = \qquad 555\cdot 0 = \qquad 22:1 =$$

$$0:0 = \qquad 0:36 = \qquad 36:0 =$$

(Ezt az utolsó sorban álló 3 feladatot a 83 negyedikes közül senki sem tudta hibátlanul megoldani!)

Az osztályok teljesítménye ezekben a feladatokban:

1. osztály: 3,5,
2. osztály: 3,1,
3. osztály: 2,1,
4. osztály: 2,0.

A többi feladatban kapott teljesítmények szintén igen alacsonyak, ezért az egyes osztályokban az összesítés az alábbi eredményt adta:

Az 1. osztályok teljesítménye: 40%,
2. osztályok teljesítménye: 45%,
3. osztályok teljesítménye: 39%,
4. osztályok teljesítménye: 37%.

A Tisztelt Kollégák minden bizonnyal emlékeznek még az 1984-85-ös tanév gimnáziumi érettségi írásbeli feladataira. És arra is, hogy a Művelődési Minisztérium 18 ponttal adta meg az elégséges érdemjegy alsó határát, ami 22%-os teljesítménynek felel meg. Engedélyezte, hogy a szaktanár ettől 3 ponttal eltérhessen, ezzel az érettségi színvonalát 19%-ra süllyeszthesse.

Egy, a matematikát az alaptanterv szerint tanuló osztály 23 érettségi dolgozata a következő képet adta: a szaktanár 15 jelölt dolgozatára javasolt elégséges érdemjegyet, de ezt is csak úgy tudta megtenni, hogy az elégséges szintet eleve minden dolgozatnál 15 pontra szállította le.

Mindegyik dolgozat hozott 9 pontot a következő feladatból: Melyik az a szám,

amelyet hozzáadva a 30-hoz, az 50-hez és a 80-hoz, három olyan számot kapunk, amelyek közül az első úgy aránylik a másodikhoz, mint a második a harmadikhoz?

Az írásbeli érettségi feladatsorozat 3. tagja felkínálta magát, hogy a jelölt további 14 pontot szerezhessen: Egy számtani sorozat második tagja 3. E sorozat első tíz tagjának az összege harmadakkora, mint a következő tíz tag összege. Határozza meg e sorozat első tagját és a differenciáját!

A szükséges összefüggések, képletek a függvénytáblázatból kiírhatók, a szöveg szolgai módon átírható a matematika szimbólumaira. De csak annak, akinek nem okozott gondot e mondat: ...összege harmadakkora, ...! Aki ezen a Skyllén szerencsésen átjutott — volt ilyen, hiszen 1/2 valószínűséggel lehetett helyesen elhelyezni a 3-as szorzót (osztót) —, azt a felírt elsőfokú egyenletrendszer megoldása közben fellépő technikai nehézségek Kharybdise sodorta el és fosztotta meg a szükséges 14 ponttól. — A hiányzó 6 (?!) pont innen-onnan, egyesével, tanári igyekezettel megkereshető. Ezek tudásértékét vitatom.

A főiskolai felvételi vizsgán a pályázóknak matematikából — amennyiben ezt választották, mert úgy vélték, hogy tudásuk e tárgyból megfelelő, — többek között ilyen típusú és nehézségű feladattal kellett megbirkózniuk: Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 9. Az „egyesek" helyén *b* áll. Mi áll a „tízesek" helyén? Milyen értékeket vehet fel *b*? — Vagy egy hasonló, de már egy kis geometriával (?) nehezítve (!): Egy háromszög egyik oldala *a* cm, a másik oldala *b* cm-rel nagyobb az előzőnél, a harmadik a másik kettő összegének a 20%-a. Írja fel e háromszög kerületét! A pályázók 50%-ának ezek, és az ezekhez hasonló feladatok megoldása komoly gondot okozott, alsó tagozatos segítő módszerekkel, a legapróbb lépésekig lebontva jutottunk el a megoldáshoz.

A bizottságban velem együtt ülő kollégáim minden bizonnyal mosolyognak magukban, amikor a számukra már annyira ismerős, együgyű kérdéseim valamelyikét felteszem: mennyi 1/4-nek a fele? Ama ritka esetben, amikor helyes választ kapok, így folytatom: és mennyi 1/2-nek az 1/4 része? — Sokatmondó az a válasz, ahol az első helyes eredmény után a másodikra hibásat kapunk.

Évenként közel száz jelentkező matematikatudását vizsgáljuk. Csak bizonyos igénytelenséggel elegyítve mondható, hogy az átlagos tudás eléri az elégséges szintet. Úgy vélem, túl sokan vannak olyan diákok, akiknek tudása nincs arányban a matematikával kötelezően eltöltött idővel.

Dilemma előtt állnak nemegyszer az államvizsga bizottság tagjai. A vizsgázó általános tudása megnyugtatónak látszik, majd váratlanul, pl. módszertani kérdés kapcsán kiderül, hogy valamely, alapvetőnek minősítendő kérdésben bizonytalan vagy tudatlan.

Ez a jelenség nem ismeretlen főiskolánkon az 5. félév végén esedékes matematika-szigorlaton. A hallgató sok helyeset, okosat mond, többféle változatban formalizálja, kvantifikálja a „csak a nők szépek" példamondatot, de fennakad egy kéttagú kifejezés egyszerűsítésén...

Látszólag önkényesen raktam egymás mellé tényeket. Azt gondolom, hogy ezeknek közös az eredetük és az eredőjük is. Mintha végigkísérné tanításunk gyakorlatát minden iskolatípusban, szinte minden osztályban, hogy valami fontos és éppen ott megtanítandó, megtanulandó elsikkadjon. A hétköznapi életben is minden életkorhoz megtalálhatók azok az ismeretek, amelyeket legjobb éppen akkor elsajátítani. Így kell gyermek-, illetve ifjúkorban megtanulni beszélni, köszönni, társalogni, írni, fogalmazni, szépen enni, udvarolni (udvarlást elfogadni vagy viszszautasítani), különböző szituációkban megfelelően viselkedni. Ilyeneket és hasonlókat elsajátíthat bárki később is, de már nehezebben. — A ma-

tematikával kapcsolatban is össze lehet állítani, hogy mit, mikor nemcsak célszerű, hanem kell megtanulni.

Időnként felröppen a matematika tanításával kapcsolatban is néhány tetszetős gondolat, mindenre üdvöt ígérő módszer. Többen ilyennek vélték a halmazelméletet mint csodaszert és a vigaszt, hogy „majd beérnek" a fogalmak, és a beéréssel együtt tudássá is válnak, addig csak gondolkozzék a gyerek.

Kétségtelen, hogy a tanulók különbözők, ezért más-más korban érik meg bennük egy-egy fogalom, de ettől függetlenül még meg lehetne tanulni egyet-mást. A fenti példasorom éppen azt kívánta érzékeltetni, hogy a tanulók sok mindent sejtenek, de keveset tudnak, mert ismereteik nem váltak készséggé.

Számomra is nagyon rokonszenves, hogy a matematikaóra legyen a gondolkodásra nevelésben a tanórák között a primus inter pares.

Félek, hogy e téren nem szerencsés a mérték, különösen nagy az aránytalanság az általános iskolákban, főleg az alsó tagozaton.

Lehet, hogy megmosolyognivaló a hasonlatom: a csecsemő nem azért nem gondolkodik, mert nincs mivel, hanem azért, mert még nincs min gondolkodnia.

Nemcsak szellemes szójátéknak, hanem az iskolában megszívlelendő bölcsességnek tartom Konfuciusnak 2500 évvel ezelőtt megfogalmazott intelmét: gondolkodás nélkül tanulni felesleges, tanulás nélkül gondolkodni veszélyes!

Természetesen tévedhetek ama sejtésemben, hogy túl sok matematikaóra telik el az országban rossz hatásfokkal, mint ahogy tévedhetek abban a meggyőződésemben is, hogy tanítványainknak igen kicsi hányada olyan, aki kis segítséggel „felfedezi" a matematikát, de a zöm olyan, akivel felfedeztethető a matematika szépsége, és jó, logikus tanári magyarázattal megértethető a tananyag, következetes számonkéréssel pedig meg is tanítható.

De ez a gondolat már messzire vezet és nem tartozik a pillanatképhez, amelyet kétségtelenül csak egy vékony fénysugár világított meg. Mégis időben 15 évet ölel fel, a 7 éves kisdiáktól a 22 éves, iskolát elhagyni készülő felnőttig. Sejtésem szerint e széles korskálán elhelyezkedő diáksereg nagy része analóg bajokat hordoz, hiszen a ma államvizsgázó tudatlansága ott gyökeredzik, ahol az alsótagozatosé.

Ez számomra azt is jelzi, hogy ugyanazok a nem jó módszerek éltek már 15 évvel ezelőtt is, és ezek kedvezőtlen hatása regisztrálható lesz 15 év múlva is a felsőoktatásban.

Vigasztaljon, hogy a többi tárgynál sem láttam kedvezőbbet?

A zsebszámológépek iskolai bevezetése a Német Demokratikus Köztársaságban

Beszélgetés Dr. Lothar Flade hallei egyetemi docenssel

Dr. Lothar Flade a hallei Martin Luther Egyetem matematika-módszertani tanszékének docense. Az NDK Pedagógiai Akadémiája „Zsebszámológép" munkacsoportjának tagjaként részt vett egy, a zsebszámológép iskolai bevezetésével kapcsolatos kísérletben 1979 és 1983 között. Az 1985/86-os tanévben bevezetésre került 7. osztályos új matematika tankönyv — amelyben külön fejezet foglalkozik a zsebszámológéppel — szerzői kollektívájának is tagja. Az ELTE vendégeként 1985 májusában Budapesten járt, ebből az alkalomból folytattuk vele a következő beszélgetést a zsebszámológép NDK-beli hivatalos iskolai bevezetésének aktuális problémáiról, tapasztalatairól.

Kezdjük beszélgetésünket a tényekkel! Hogyan áll jelenleg a zsebszámológép bevezetésének kérdése az NDK-ban?

1985. szeptember 1-től minden 7. osz-

tályban hivatalosan bevezetésre kerül a zsebszámológép a matematikaoktatásban. A 11. osztályokban már 1984-től hivatalosan bevezetésre került a zsebszámológép, és ezeknek az osztályoknak a tanulói 1986-ban már az érettségi vizsgán is használhatnak gépet. A megfelelő dokumentumok elkészültek. A 7. osztályos tanterv, tankönyv, tanári segédkönyv külön fejezetet szentel az elektronikus zsebszámológép bevezetésének.

Milyen kísérletek előzték meg a bevezetést?

1979 szeptemberétől 1983 júniusáig 21 osztály több, mint 500 tanulója vett részt a kísérletben. 1979-ben a 7. osztályokban kezdtük és végigvizsgáltuk a 10. osztály befejezéséig a zsebszámológép bevezetését, használatát a matematikaoktatásban. Az NDK Pedagógiai Akadémiájának keretében megalakult egy ún. „Zsebszámológép" munkacsoport, melynek tagjai között volt több matematikadidaktikai szakember, a Pedagógiai Akadémia megfelelő osztályának egy tagja, a készüléket előállító gyár egyik képviselője, matematikaszakfelügyelő és több matematikaszaktanár.

A kísérleti osztályokban tanító matematikatanárok a kísérlet megkezdése előtt a legtöbb témához a zsebszámológép bevezetésének didaktikai-metodikai koncepcióján alapuló írásos segédanyagot kaptak munkájuk megkönnyítése és az egységesség céljából. A bevezetés a hagyományos matematika-tanterv keretében ment végbe, kivétel a logarléc kiiktatása volt; ez természetes, hiszen a zsebszámológép használata ezt az eszközt feleslegessé tette. Kezdettől fogva 18 kontroll osztály is részt vett a felmérésekben a kísérlet eredményeinek értékelése miatt. A kísérleti és kontroll osztályok tanulói közel azonos tanulmányi szinten álltak a kísérlet megkezdésekor.

Megbízható, felhasználásra képes számolni tudás, számolási készség ma is, és minden bizonnyal a jövőben is elengedhetetlen része lesz az általános matematikai képzésnek. Viszont ez a terminus igen komplex személyiségminősítést jelent. Az Ön véleménye szerint melyek a legfontosabb összetevői?

Magában foglalja:

— A szóbeli (fej)számolási készséget és az írásbeli műveletek algoritmusának ismeretét a különböző számkörökben.
— Az ún. „számérzetet", a számok nagyságának felfogását, érzetét.
— A változó bevezetését, változókkal és mennyiségekkel való munkát.
— Számolási segédeszközökkel (zsebszámológép, táblázatok stb.) való munkát.
— Ésszerű pontossággal való számolást, becslést, a közelítő értékekkel való számolni tudást.
— Számolási előnyök észrevételét, használatát, a racionális megoldási út kiválasztásának képességét, megoldási terv összeállításának képességét.
— Kifejezések struktúrájának felismerését, elemzését.
— A megoldás világos, pontos és áttekinthető rögzítésének képességét.
— Kritikus önkontroll képességét és szokását.

A kísérlet tanúsága szerint milyen hatással volt a zsebszámológép az egyes összetevőkre?

Kezdjük a közvéleményben és a szülők között is divatos témával, kérdéssel! Milyen hatással volt a gép használata a fejszámolási készség fejlődésére?

A szülők, sőt a tanárok véleménye is megoszlott e kérdést illetően. Sokan voltak, akik szerint a gép bevezetése elkényelmesíti a tanulókat, még az egyszeregyet sem fogják tudni! Kétségtelen, hogy a kísérletben részt vevő tanulók között akadt olyan, aki teljesen a gépre bízta magát, és olyan feladatokat, mint pl. $2{,}7 \cdot 3$; $-11 \cdot 15$; 15^2 — amelyeknél a gyakorlott agy gyorsabban működik a gépnél, — is a gombok nyomogatásával oldott meg. Persze nálunk is akadt és akad olyan tanuló, aki pl. az $5 \cdot 7$ értékét is géppel számítja ki.

Határozott véleményünk, hogy a fejszámolás továbbra is fontos kérdés marad, s az ún. napi gyakorlatok során a felsőbb osztályokban is folyamatosan, állandóan gyakorolni kell. A kísérletben részt vevő tanárok figyelmét is nyomatékosan felhívtuk a gyakorlás fontosságára. Egyelőre azért nem megengedett az alsóbb osztályokban a zsebszámológép használata, hogy biztos, megalapozott számfogalom fejlődjön ki a tanulókban. A tanterv előírása szerint kívülről kell tudni a tanulóknak például az 1 és 20 közötti természetes számok négyzetét; a sin 0°, sin 30°, sin 45°, sin 60°, sin 90° értékét.

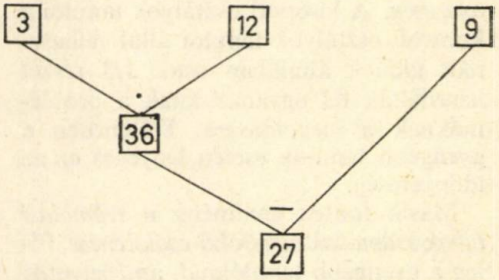
A többször is végrehajtott fejszámolási tesztellenőrzések nem mutattak ki lényeges eltérést a fejszámolás területén a kísérleti és kontroll osztályok tanulói között.

Írásbeli műveletek

Az írásbeli számolási készség területén érthető módon a kísérleti osztályok tanulói valamivel gyengébb eredményt értek el, mint a kontroll osztályok tanulói. A tesztek tanúsága — itt zsebszámológép nélkül kellett a kijelölt műveleteket elvégezni —, hogy a kísérleti osztályok tanulóinak többsége birtokolja az írásbeli műveleti algoritmusokat. Várható, hogy a zsebszámológép tömeges bevezetése után még gyengébb lesz a tanulók teljesítménye az írásbeli műveletek terén. Ez természetes következménye annak, hogy a begyakorlásra nem fordítódik annyi idő. De mindezért nem kell bánkódni, hiszen a zsebszámológép használata épp az írásbeli műveletek elvégzését teszi feleslegessé. Ez az egyik nagy előnye.

Kifejezések struktúrájának észrevétele, figyelembevétele

Olyan számolási feladatoknál, amelyeknél a műveletek elvégzésének sorrendje is lényeges, a kísérleti osztályok tanulói jobb eredményt értek el, végig a 8., 9. és 10. osztályban is. A kísérleti osztályok tanulóinak a géppel való számolás előtt „számolási tervet" kellett összeállítaniuk, ezért számukra természetes volt a sorrend figyelembevétele. Az algoritmikus szemléletet jól fejlesztik az ilyen, ún. „számolási terv"-et összeállító gyakorlatok, miközben a racionális megoldási út megtalálásának is lényeges szerepe lesz. Fontosnak tartjuk, hogy e szemléletet már az alsóbb osztályokban ki kell alakítani. A műveletek sorrendjére vonatkozó szabályokat ekkor kell rögzíteni. Célszerű már ekkor az ilyen jellegű feladatokat a „gép szellemében" rögzíteni. Az 5. osztályos tankönyvben például a $3 \cdot 12 - 9$ feladat kiszámításához a következő „számolási terv" kerül bemutatásra:



Nem véletlenül használunk kis négyzeteket, ezzel „hozzászoknak" a tanulók a zsebszámológép gombjaihoz, és a későbbiekben természetessé válik számukra, hogy milyen gombokat kell megnyomni a megfelelő sorrendben.

Ésszerű pontossággal való számolás

A tanulóknak tisztában kell lenniük a gép korlátaival. A kijelzőn nyolc jegy számára van elegendő hely: 99 999 999 a legnagyobb és 0,000 000 1 a legkisebb szám, amelyet a gép ki tud jelezni, természetesen a normálalak felhasználása nélkül. A gép korlátai és a gyakorlati élet szükségletei természetesen vetik fel a közelítő értékekkel való számolás szükségességét. A 6. osztályban megismerkednek a tanulók a közelítő értékekkel való műveletek szabályaival, ez jó előkészület a 7. osztályra. A kísérlet során e kérdéskörben kevés problémával találkoztunk.

Természetesen vetődik fel az ellenőrzés kérdése is. Tapasztalataink szerint a tanulók egy része „vakon hisz" a gépnek,

s nem hajlandó ellenőrizni eredményeit, mondván, hogy a gép megbízhatóbb, nem téved. Kitartó, céltudatos munkával, szoktatással el kell érni, hogy tanulóink végezzenek ellenőrzést. Különféle módokkal kell megismertetni a tanulókat: próba, becslés, annak az intervallumnak az előzetes meghatározása, amelybe bele kell esnie az eredménynek, saját tapasztalatokkal való összevetés, a műveletek újbóli elvégzése géppel stb.

További tapasztalatok, eredmények

A zsebszámológép bevezetésének egyik legfontosabb eredménye a jelentős *időnyereség*. A kísérleti osztályok tanulói a kontroll osztályok tanulói által felhasznált időnek általában csak 1/3 részét használták fel ugyanazoknak a problémáknak a megoldására. Különösen a gyengébb tanulók esetén lényeges ez az időnyereség.

Másik fontos eredmény *a számolási hibák számának nagyfokú csökkenése*, főleg a gyengébb tanulóknál, ami jelentős önbizalom-növekedést eredményezett. Jogos remény, hogy a zsebszámológép bevezetésével elért időnyereség, továbbá a mechanikus számolási munka alól való felszabadítás a matematikai fogalmak, összefüggések mélyebb megértéséhez vezetnek. Az ellenőrző tesztek olyan feladataiban, amelyekben a számolási készségen kívüli matematikai ismeretek, összefüggések tudása, alkalmazása is szükséges volt, a kísérleti osztályok tanulói valamivel jobb eredményt értek el, gyakrabban jutottak el a helyes végeredményhez, főleg azért is, mert kevesebb számolási hibát követtek el közben.

Természetes, hogy a több idő önmagában még nem elegendő jobb eredmény eléréséhez, metodikailag, didaktikailag helyesen kell tervezni a nyert idő felhasználását. (A tanuló szerepe a tanulási-tanítási folyamatban stb.) A szöveges feladatok megoldása terén is pozitív tapasztalataink voltak a kísérleti osztályokban.

Hasonló pozitív tapasztalatokról számoltak be a kísérleti osztályokban tanító kémia, fizika és gyakorlati tanárok is. A zsebszámológép használata mentesítette a tanulókat az időigényes, mechanikus munkától, ezért a kísérletek minőségi elemzésére lényegesen több idő maradt.

Szólni kell érzelmi, motivációs tényezőkről is. A kísérlet tapasztalatai szerint a zsebszámológép bevezetése pozitív hatást gyakorolt a tanulók matematikához való hozzáállására is.

A tanárok felkészítése

Már az előbbiekben említettem, hogy a kísérletben részt vevő tanárok részletes utasításokat, írásbeli ajánlásokat kaptak. A kísérlet közben is gyakran tartottunk megbeszéléseket, és ezeken kétirányú eszmecsere folyt, a tanárok problémáira a kísérlet vezetői részletes magyarázatot adtak, esetleg módosításokat eszközöltek.

Az országos bevezetést is alaposan megszerveztük. Először a szakfelügyelők részére volt egy központi előkészítő, centrális kérdés a zsebszámológép bevezetése volt, konkrét gépes gyakorlatokkal. A következő lépés: az új tanév megkezdése előtt, szeptember elején a szakfelügyelők minden kerületben tanfolyamokat tartottak a szaktanárok számára. Minden tanár részvétele kötelező volt. Fontosnak tartjuk azt is, hogy a tanterv, az átdolgozott tankönyv és a tanári segédkönyv minden tanárnak rendelkezésére állt, alaposan felkészülhetett a zsebszámológép bevezetésére. Mindezt azért hangsúlyozom, mert véleményünk szerint ezek nélkül a segédanyagok nélkül a zsebszámológép bevezetése valószínűleg több kárt okozott volna, mint hasznot. Csak így várható el, hogy a tanárok valóban tudatában lesznek annak, mi is a zsebszámológép funkciója a matematikaoktatásban.

Kitekintés, összegzés

Tovább folytatódik a tankönyvek átdolgozása, természetesen figyelembe véve a zsebszámológép használatát. Hogy mennyire módosulnak a dolgok, arra egyetlen példát említenék. A kifejezésekkel való műveletek során a leképezési

törvény alkalmazásakor az $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}$ képletből ki kellett fejezni f-et: $f=\frac{tk}{t+k}$.

Mivel a zsebszámológépnek van reciprok gombja, ez lehetővé teszi közvetlenül az f meghatározását, a kifejezés átalakítása nélkül.

Alaposan végig kell gondolni metodikailag is a gép lehetőségeit. Több idő és lehetőség nyílik a próbálkozásokra, szisztematikus kísérletezésekre. (Egyenlőtlenségek megoldása, függvényvizsgálat, határérték stb.)

Nagyon fontosnak tartjuk, hogy a gép használata lehetővé teszi a valódi élet reális adataival való számolásokat. Az élettel való kapcsolat ezzel jelentősen erősödik.

Alapos megfontolást és széles körű kísérletezést kíván annak a vizsgálata, hogy az 1—6. osztályokban milyen szerepet játszhat a zsebszámológép.

Befejezésül szeretném hangsúlyozni, hogy a zsebszámológép bevezetése jól szolgálja az algoritmikus szemlélet kialakítását, s megfelelő előkészületet biztosít a személyi számítógépek bevezetéséhez.

Az interjút készítette:
Dr. Ambrus András

LUKÁCS OTTÓ
főiskolai docens
Bánki Donát Gépipari Műszaki Főiskola, Budapest

A ciklusszervezés tanítása

Bevezetés

1983-tól kezdve a Bánki Donát Gépipari Műszaki Főiskolán a matematikát és a számítástechnikát integrált tárgyként oktatjuk dr. Fekete István tanszékvezető tanár vezetésével. Tartunk COMMODORE-64 személyi számítógép tanfolyamokat is.

Az itt és másutt, oktatásból vagy könyvekből szerzett tapasztalatok azt mutatják, hogy *a ciklusszervezés a hallgatóságnak komoly probléma,* megtanítani sokszor maga az oktató is nehezen tudja.

Gyakran úgy tanítják, hogy *a kész folyamatábrán magyarázzák el, hogyan „működik" a ciklus.* Nem mondható ez a módszer sem rossznak. *Hibája* azonban, hogy a hallgató nem látja: ha nincs kész folyamatábra, és neki kell a ciklust megszerveznie, akkor mit csináljon.

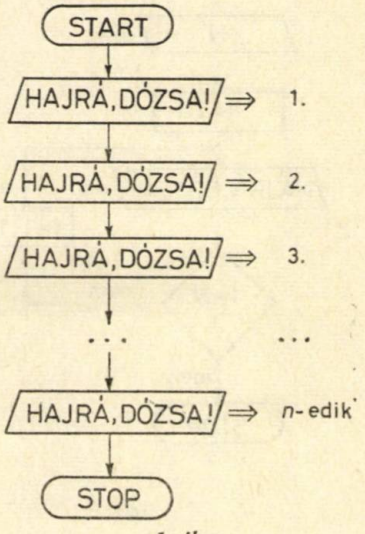
Három példát mutatunk arra, hogyan lehet elérni, hogy *a hallgató ne csak értelmezni tudja a ciklus működését egy kész algoritmusban, hanem ő tudja önállóan megszervezni a ciklust, létrehozni a folyamatábrát.*

Kezdő feladat a ciklusszervezéshez

Egy Dózsa-szurkoló számítógéppel ki akarja nyomtatni n-szer (ahol n adott pozitív egész szám) azt a szöveget, hogy

HAJRÁ, DÓZSA!

Megteheti azt, hogy n-szer egymás után kinyomtatja a szóban forgó szöveget (1. ábra):



1. ábra

```
1Ø PRINT "HAJRA, DOZSA!"
2Ø PRINT "HAJRA, DOZSA!"
3Ø PRINT "HAJRA, DOZSA!"
4Ø PRINT "HAJRA, DOZSA!"
5Ø PRINT "HAJRA, DOZSA!"
6Ø END
```

Itt most $n=5$. Gondoljuk el, hogy milyen kellemetlen volna, ha *$n=100$-szor kellene ugyanazt az utasítást adni a gépnek!*

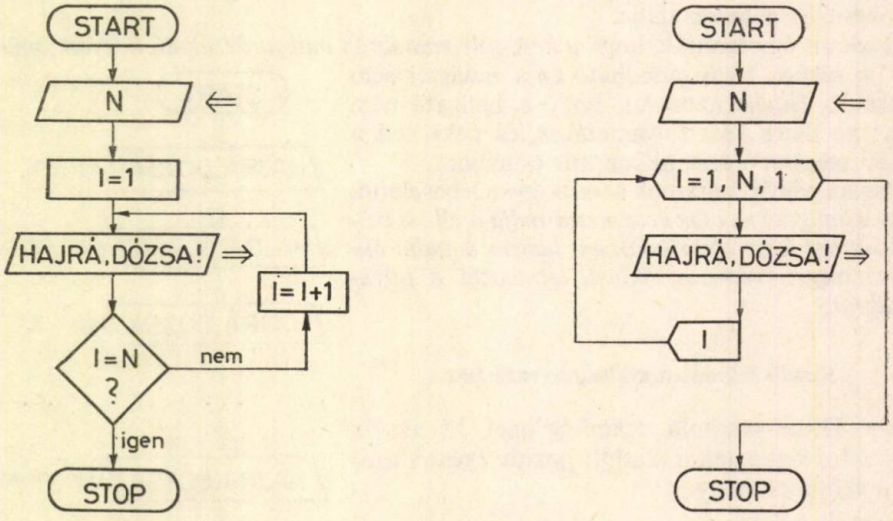
Meg kell szerveznünk azt, hogy *az egyszer adott* PRINT "HAJRA, DOZSA!" *utasítást a gép többször hajtsa végre.* Azt csináljuk, hogy egyszer írjuk le a szóban forgó „tevékenységet" (a ciklusmagot), és utasítjuk a gépet, hogy térjen vissza ugyanarra az utasításra (2. ábra):

```
1Ø PRINT "HAJRA, DOZSA!"
2Ø GOTO 1Ø
3Ø END
```

2. ábra

Ha a géppel megpróbáljuk lefuttatni ezt a programot, akkor azt vesszük észre, hogy valóban megismétli a ciklusmagot (a szóban forgó szöveg kinyomtatását), de képtelen abbahagyni (sosem jut el az END-hez), *végtelen ciklust* ír elő a program. Mit kell tennünk, hogy csak annyiszor írja ki a gép a szöveget, ahányszor kérjük?

Megadjuk előre n-et, és *egy i ciklusszámlálóval számláljuk, hányszor hajtotta végre a gép a ciklikusan ismétlendő utasítást.* Ha az i nem éri el n-et, akkor visszakanyarítjuk a programot az ismétlésre (gondoskodva róla, hogy i 1-gyel növekedjék). Ha az i eléri az n-et, akkor lezárjuk a programot. Az IF-*es ciklusszervezést* mutatja a 3*a)* ábra, a hozzá tartozó program:



a) *b)*

3. ábra

```
1Ø INPUT N
2Ø I=1
3Ø PRINT "HAJRA, DOZSA!"
4Ø IF I=N THEN END
5Ø I=I+1: GOTO 3Ø
```

A FOR-NEXT *utasításpár* voltaképpen ugyanazt a hátultesztelő ciklusszervezést hajtja végre, mint amit a mutatott IF-es (*3b)* ábra). A program:

```
1Ø INPUT "N="; N
2Ø FOR I=1 TO N STEP 1
3Ø PRINT "HAJRA, DOZSA!"
4Ø NEXT I
5Ø END
```

Egy bonyolultabb ciklusszervezés

A számítógépet meg akarjuk tanítani cos x Taylor-polinommal való közelítésére (adott x értéknél). A Taylor-sor:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \ldots$$

Egy T elnevezésű változóban számíttassuk az újabb és újabb tagokat $\left(1, -\frac{x^2}{2!}, \frac{x^4}{4!}\right.$ stb.), ezeket egy CX változónak megfelelő tár-rekeszben adassuk össze (CX a cos x rövidítése), az eljárás egészen addig menjen, amíg az újabb T tag már keveset módosít az addigi összegen, vagyis ez a tag — abszolút értékben — egy előre megadott, kicsiny ε-nál (0,0001-nél, 0,000 01-nél stb.) kisebb nem lesz:

$$|T| < \varepsilon.$$

Részletezzük $n=0, 2, 4, 6$ esetén az x^n-t tartalmazó tagok kiszámítását, majd CX-hez való hozzáadatását:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} \pm \cdots$$

$n = 0$	$T = 1$		$CX = 1$
$n = 2$	$T \Leftarrow T \cdot \left(-\frac{x^2}{1\cdot 2}\right)$		$CX = 1 - \frac{x^2}{2!}$
$n = 4$		$T \Leftarrow T \cdot \left(-\frac{x^2}{3\cdot 4}\right)$	$CX = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$
$n = 6$		$T \Leftarrow T \cdot \left(-\frac{x^2}{5\cdot 6}\right)$	$CX = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$

Figyeljük meg, hogy általánosítva *az ismétlődő lépések a következők:*
1) n értékének 2-vel való növelése, $n \Leftarrow n+2$,

2) az új tag kiszámítása úgy, hogy az előző T értéket $\left(-\frac{x^2}{(n-1)n}\right)$-nel szorozzuk:

$\boxed{T \Leftarrow T \cdot \left(-\frac{x^2}{(n-1)n}\right)}$,

3) CX új értékének kiszámítása úgy, hogy CX előző értékéhez hozzáadjuk az új tagot:

$\boxed{CX \Leftarrow CX+T}$;

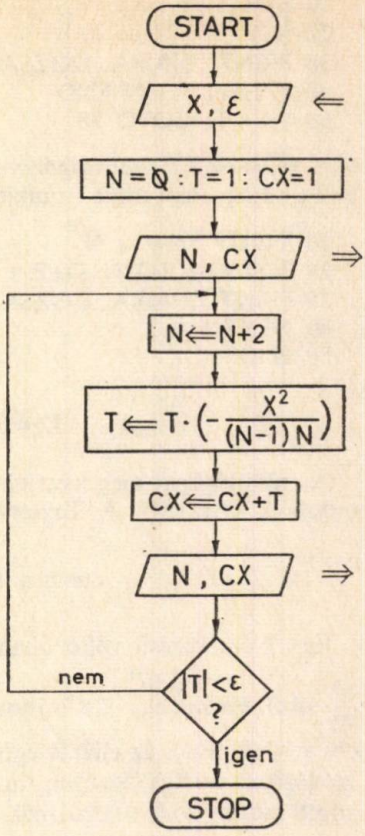
4) írassuk ki minden egyes CX érték kiszámítása után n és CX értékét: $\boxed{n, CX} \Rightarrow$.

A fenti 1)-2)-3)-4) lépéseket addig kell ismételni, amíg az új tag már nagyon kicsi nem lesz:

$$|T| < \varepsilon.$$

Látszik tehát, hogy *itt is lépéssorozat ismétlődéséről (ciklusról) van szó.* IF-fel kell a ciklust szerveznünk, mert n végső értéke (vagyis hogy hányadik tagig kell elmennünk) itt nem ismert (FOR esetén n végső értékét előre meg kellene adnunk).

Ilyen előkészítés után a 4. folyamatábrát a hallgatóság is meg tudja szerkeszteni. A program a következő:



4. ábra

```
5 INPUT "X, E="; X, E
10 N=0; T=1; CX=1
15 PRINT "N="; N;
   "COS X KOZELITO ERTEKE="; CX
20 N=N+2
25 T=T*(-X↑2/(N-1)*N)
30 CX=CX+T
35 PRINT "N="; N; "COS X KOZELITO ERTEKE="; CX
40 IF ABS(T)<E THEN END
45 GOTO 20
```

Egy dupla ciklus

Programot akarunk írni arra, hogy *a gép az* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *rendezetlen adatokat nagyság szerint növekvő sorrendbe rendezze.*

Egy példán mutatjuk be az algoritmust. Legyenek a növekvő sorrendbe rendezendő számaink

5	4	3	2	4
X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)

a) Kerestessük meg először az első legkisebbet úgy, hogy a keresés során megtalált, addigi legkisebb indexét a gép jegyezze meg egy IN (=legkisebb indexe) változóban. Ha csak 1 számunk van, akkor IN=1, X(IN)=5. Mivel most több számunk van, meg kell nézetnünk, vajon teljesül-e az, hogy

$X(2) < X(IN)$, $\left\langle \begin{array}{l} \text{ha nem, akkor folytassuk a keresést,} \\ \text{de most igen, ezért IN=2,} \end{array} \right.$

$X(3)<X(IN)$, $\left\langle \begin{array}{l} \text{ha nem, folytassuk a keresést,} \\ \text{de most igen, így } IN=3, \end{array} \right.$

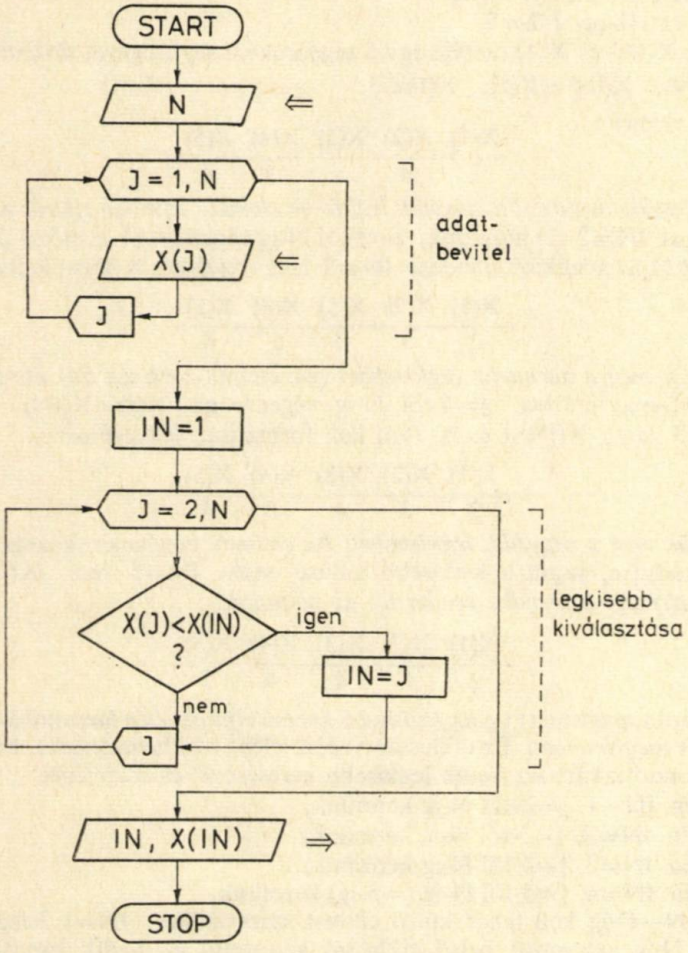
$X(4)<X(IN)$, $\left\langle \begin{array}{l} \text{ha nem, folytassuk a keresést,} \\ \text{de most igen, ezért } IN=4, \end{array} \right.$

$X(5)<X(IN)$, $\left\langle \begin{array}{l} \text{nem, az utolsó számhoz értünk,} \\ \text{ha a válasz igen volna, } IN=5 \text{ lenne.} \end{array} \right.$

A részletes kiírást áttekintve, látszik, hogy *többször ugyanazt az eljárást végeztük el.* Azt vizsgáltuk, teljesül-e (J=2-től N-ig), hogy

$X(J)<X(IN)$, $\left\langle \begin{array}{l} \text{ha nem, folytatjuk a keresést,} \\ \text{ha igen, akkor } IN=J. \end{array} \right.$

A legkisebb elem és indexének kiíratására szolgál az alábbi program (lásd az *5a)* folyamatábrát!):



5a) ábra

```
10 INPUT "HANY ADAT VAN"; N
20 FOR J=1 TO N
30 PRINT "X" J "="; INPUT X(J)
40 NEXT
50 IN=1
60 FOR J=2 TO N
70 IF X(J)<X(IN) THEN IN=J
80 NEXT
90 PRINT "A LEGKISEBB AZ"; IN; "ADAT, ERTEKE="; X(IN)
100 END
```

b) Ezek után *az első legkisebbet*, X(IN)-t *cseréljük fel* X(1)*-gyel!* Hogyan? Mint ahogy két hordó tartalmát, H1-et és H2-t egy S segédhordóba való átöntéssel cserélhetünk fel:

töltsük H1-et S-be, S⇐H1,
töltsük H2-t H1-be, H1⇐H2,
töltsük S-et H2-be, H2⇐S.

Ugyanígy X(IN) és X(1) cseréje egy S segédrekesz segítségével történhet:

S⇐X(IN), X(IN)⇐X(1), X(1)⇐S.

Ezért az elemek:

X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)
2	4	3	5	4

c) Kerestessük meg most a második legkisebb elemet (az előző eljárás megismétlésével, csak most IN=2-vel indulunk, J=3-tól N-ig végezzük el az előző X(J)<X(IN) vizsgálatot)! Most a legkisebb indexe IN=3 lesz, X(2)-t és X(IN)-t kell megcserélni:

X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)
2	3	4	5	4

Kerestessük meg a harmadik legkisebbet (ismételjük meg az *5a)* ábrán vázolt eljárást IN=3-mal indítva, J=4-től N-ig végezve az X(J)<X(IN) vizsgálatot)! Most IN=3 lesz, X(IN)-t és X(3)-at kell formálisan felcserélni:

X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)
2	3	4	5	4

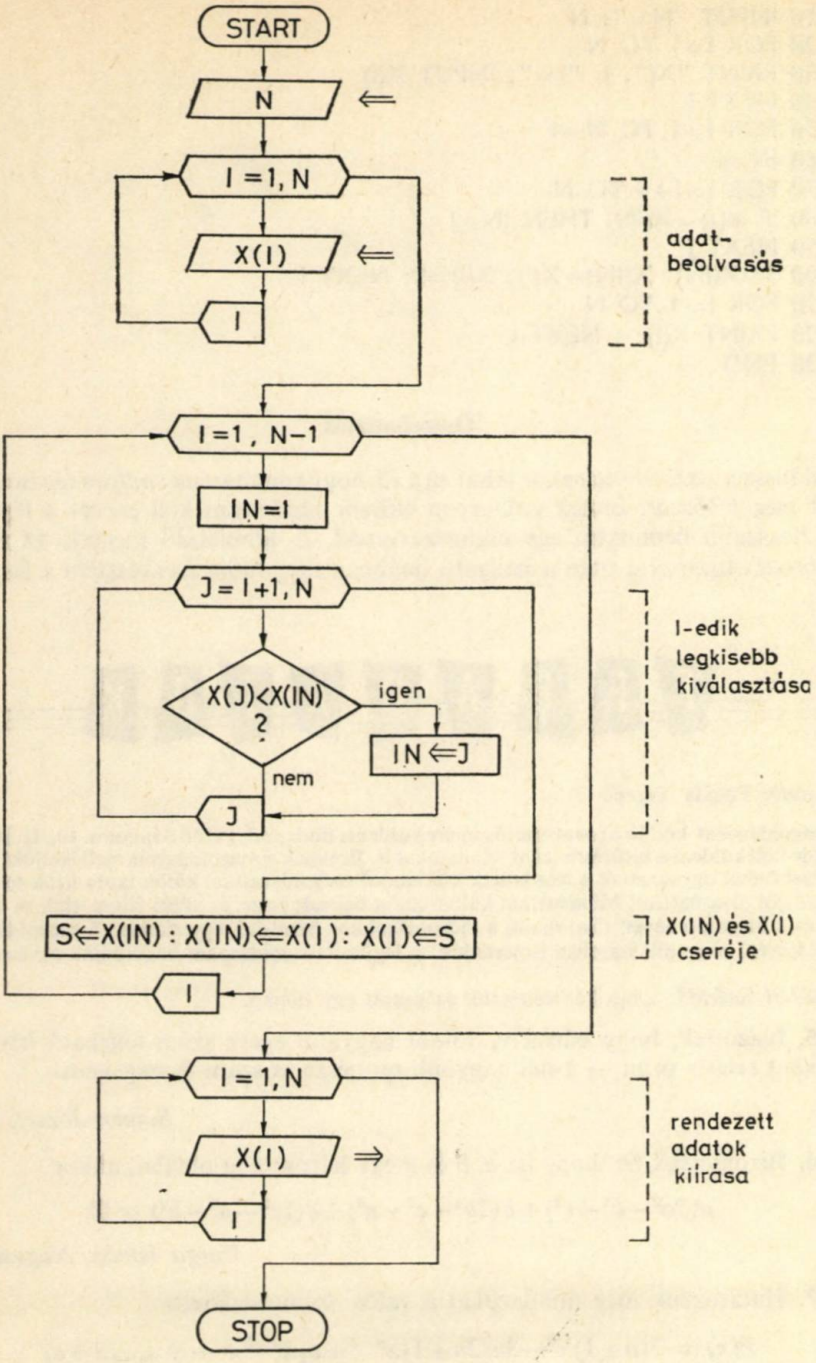
Kerestessük meg a negyedik legkisebbet! Az elsőnek megismert eljárás ismétlésével IN=4-től indulva, végül a legkisebb indexe most IN=5 lesz, X(IN) és X(4) cseréjével *nagysági sorrendbe rendeztük az adatokat:*

X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)
2	3	4	4	5

Az *5a)* ábrán megismert I*-edik legkisebb kereső eljárást és a hozzátoldott elemcserét kell többször megismételni.* Ez ciklusszervezést jelent I ciklusindexszel. Figyeljük a *c)* pontban mondottakat! Az I-edik legkisebb keresésénél és cseréjénél

I=1 esetén IN=1, J=2-től N-ig keresünk,
I=2 esetén IN=2, J=3-tól N-ig keresünk,
I=3 esetén IN=3, J=4-től N-ig keresünk,
I=4 esetén IN=4, J=5-től N-ig (=5-ig) keresünk.

I=1-től (N−1)-ig kell tehát külső ciklust szerveznünk, IN=I kezdéssel, utána J=I+1-től N-ig szervezett belső ciklussal kerestetni az I-edik legkisebbet, majd X(IN)-t cseréltetni X(I)-vel. *Ez dupla ciklust jelent (5b)* ábra). Mellékeljük a programot.


START
N
I = 1, N
X(I)
I
adat-
beolvasás
I = 1 , N-1
IN=I
J = I+1, N
X(J)<X(IN)
?
igen
IN⇐J
nem
J
I-edik
legkisebb
kiválasztása
S⇐X(IN) : X(IN)⇐X(I) : X(I)⇐S
I
X(IN) és X(I)
cseréje
I = 1, N
X(I)
I
rendezett
adatok
kiírása
STOP

5b) ábra

```
1Ø INPUT "N="; N
2Ø FOR I=1 TO N
3Ø PRINT "X("; I; ")="; INPUT X(I)
4Ø NEXT I
5Ø FOR I=1 TO N-1
6Ø IN=I
7Ø FOR J=I+1 TO N
8Ø IF X(J)<X(IN) THEN IN=J
9Ø NEXT J
1ØØ S=X(IN): X(IN)=X(I): X(I)=S: NEXT I
11Ø FOR I=1 TO N
12Ø PRINT X(I); : NEXT I
13Ø END
```

Összefoglalás

A ciklusszervezés oktatásakor tehát az a fő, hogy bemutassuk: *milyen lépések ismétlődnek meg többször.* Ennek érdekében először részletezni kell ezeket a lépéseket. Így hosszabb bemutatni egy ciklusszervezést. A többletidő megéri: az ismételt lépéssorozat tisztázása után a hallgató önállóan meg tudja szerkeszteni a folyamatábrát.

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1125. Igazoljuk, hogy bármely, 13-nál nagyobb egész szám felírható három — páronként relatív prím — 1-nél nagyobb természetes szám összegeként!

Sándor József, Farcád

1126. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b és c egy háromszög oldalai, akkor

$$a(2a^2-b^2-c^2)+b(2b^2-c^2-a^2)+c(2c^2-a^2-b^2) \geqq 0!$$

Varga István, Nagyszalonta

1127. Határozzuk meg mindazokat a valós számtest feletti

$$P(x) := 2(n+1)x^n-3n(2n+1)x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

polinomokat, amelyekre $n \geqq 1$, és x_k gyökeire $k^2 \leqq x_k \leqq (k+1)^2$, $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Bencze Mihály, Brassó

1128. Legyen x_0 tetszőleges egész szám! Mutassuk meg, hogy az $x_{n+1}=2x_n^2-1$ rekurzióval definiált (x_n) sorozatban az $\frac{x_n-1}{3\cdot 2^{n+1}}$ hányados mindig egész szám, bármely egynél nagyobb n-re!

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

1129. Adott r sugarú körbe írt háromszögek közül, melyiknek van a legnagyobb területű *Morley*-háromszöge, és mekkora ez a terület? (Valamely háromszög *Morley*-háromszögének egy-egy csúcsa, a háromszög szögeinek az oldalakhoz „közelebbi" harmadolóinak közös pontja.)

Mészáros József, Galánta

1130. Egy $14\times 9=126$ mezőből álló T téglalapot hézagmentesen lefedhetünk 9 darab 2×3-as „álló" és 12 darab 3×2-es „fekvő" téglalappal (az „álló" téglalap hosszabbik oldala az eredeti téglalap rövidebb oldalával párhuzamos). Bizonyítsuk be, hogy T-nek nincs 10 „álló" és 11 „fekvő" (egybevágó) téglalapból álló feldarabolása!

Kárteszi Ferenc, Budapest

Feladatmegoldások (1101—1106.)

1101. Az $ABCD$ konvex négyszöget középvonalai négy négyszögre bontják. Ezek területét — pozitív körüljárásban — jelölje t_1, t_2, t_3 és t_4. Igazoljuk, hogy $t_1+t_3=t_2+t_4$!

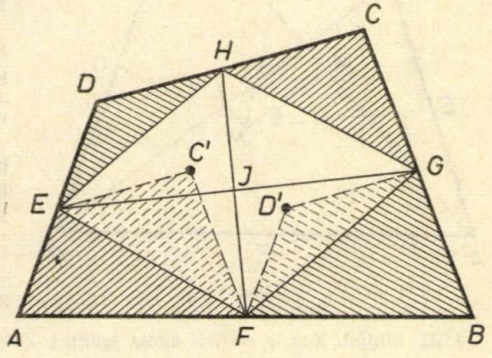
Róka Sándor, Tiszavasvári

I. megoldás: Ismert, hogy a négyszög oldalfelező pontjai egy paralelogramma csúcsai. E paralelogramma átlói — az eredeti négyszög középvonalai — a paralelogrammát négy egyenlő területű háromszögre bontják. Ha egy-egy háromszögterületet levonunk a t_1, t_2, t_3, t_4 területekből, akkor — az *1. ábra* jelöléseit használva — elegendő azt belátni, hogy

$$t(AFE\triangle)+t(CHG\triangle)=$$
$$=t(BGF\triangle)+t(DEH\triangle).$$

Ennek igazolása érdekében toljuk el a $CHG\triangle$-et $\overrightarrow{HE}$ vektorral, $DEH\triangle$-et pedig $\overrightarrow{HG}$ vektorral. C képét jelölje C', D képét pedig D'.

Az $AFC'E$ és az $FBGD'$ négyszögek egybevágóak, mert megfelelő oldalaik páronként egyállásúak és egyenlő hosszúak, továbbá emiatt megfelelő szögeik is egyenlők, tehát a területük is egyenlő, és ezt kellett bizonyítanunk.



1. ábra

Kamarás Lajos, Pécs; Nagy Pál, Debrecen

II. megoldás: Az előbbi megoldás első bekezdésében foglaltakat felhasználva, az *1. ábra* jelöléseivel azt igazoljuk, hogy

$$(*)\qquad t(AFE)+t(GCH)=t(FBG)+t(HDE)=\frac{1}{4}t(ABCD).$$

Mivel az AFE háromszög az ABD háromszöghöz hasonló, és a hasonlóság aránya 1:2, ezért

$$t(AFE)=\frac{1}{4}t(ABD).$$

Hasonlóan nyerjük:

$$t(GCH) = \frac{1}{4}t(BCD); \quad t(FBG) = \frac{1}{4}t(ABC) \quad \text{és} \quad t(HDE) = \frac{1}{4}t(CDA).$$

Mivel $t(ABD)+t(BCD)=t(ABC)+t(CDA)=t(ABCD)$, ezért előbbi, illetve utóbbi két egyenlőségünk összegéből következik a (*) alatti egyenlőség, és így igaz a feladat állítása.

Boda Miklós, Pécs,
Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest,
Dr. Marosvári Péter, Budapest

III. megoldás: A t_1, t_2, t_3, t_4 területek a következőképpen kaphatók:

$$t_1 = t(AFJ)+t(AEJ); \quad t_2 = t(BFJ)+t(BGJ);$$
$$t_3 = t(CGJ)+t(CHJ); \quad t_4 = t(DHJ)+t(DEJ).$$

De $t(AFJ)=t(BFJ)$, mert $AF=BF$ és az ezekhez tartozó magasságuk egyenlő. Hasonlóan nyerjük:

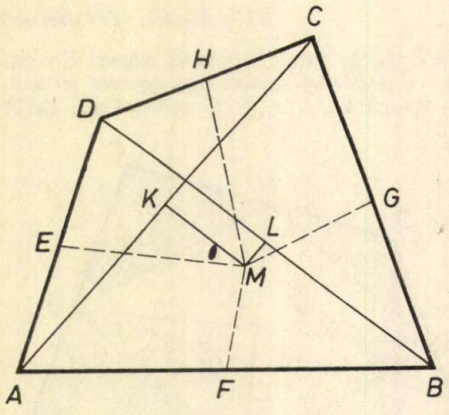
$$t(BGJ) = t(CGJ), \quad t(CHJ) = t(DHJ) \quad \text{és} \quad t(DEJ) = t(AEJ).$$

Mindezekből a $t_1+t_3=t_2+t_4$ következik.

Földeák Árpád, Budapest,
Major Piroska, Budapest,
Mészáros Mihály, Hejőkeresztúr

IV. megoldás: Először bebizonyítjuk, hogy ha egy konvex négyszög átlóinak felezőpontjain át a másik átlóval húzott párhuzamos egyenesek metszéspontját a négyszög oldalfelezőpontjaival összekötjük, a négyszöget négy egyenlő területű négyszögre daraboljuk.

A *2. ábra* jelöléseivel, ahol K és L az átlók felezőpontja, M a másik átlóval párhuzamosan húzott egyenesek metszéspontja, az $AC \| EH \| FG \| LM$ miatt:



2. ábra

$$t(HDEM) = t(HDEL) =$$
$$= \frac{1}{2}t(CDAL) = \frac{1}{4}t(ABCD),$$

vagyis a szóban forgó négyszögek mindegyikének területe az eredeti négyszög területének negyede.

Bizonyításunkból az is kiderült, hogy az M pontot az átlókkal párhuzamos egyeneseken mozgatva, az $AFME$ és a $CGMH$, illetve a $BGMF$ és a $DEMH$ négyszögek területének összege nem változik.

Az $ABCD$ négyszög középvonalainak közös J pontjába pedig ilyen úton elmozgatható az M pont, hiszen J az $FLHK$ paralelogramma középpontja.

Ezzel bizonyításunkat befejeztük.

Kiss László, Csíkszereda

A megoldók száma: 36.

1102. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az

$$x^3+4x = y^4$$

egyenletet!

Nagy Ferenc, Hajdúnánás

Megoldás: Egyenletünk bal oldalát szorzattá alakítva $x(x^2+4)=y^4$ adódik, amiből $x|y^4$ következik.

Legyen y prímtényezős felbontása:

$$y = 2^k p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}, \quad \text{ahol} \quad k \geq 0, \quad \alpha_i \geq 0.$$

Ekkor $x|y^4$ miatt $x=2^t p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$ alakú, ahol $t \leq 4k$ és $\beta_i \leq 4\alpha_i$.

Egyenletünk így

$$2^t p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r} (2^{2t} p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} \dots p_r^{2\beta_r} + 4) = 2^{4k} p_1^{4\alpha_1} p_2^{4\alpha_2} \dots p_r^{4\alpha_r},$$

rendezés és egyszerűsítés után

$$2^{2t-2} p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} \dots p_r^{2\beta_r} + 1 = 2^{4k-t-2} p_1^{4\alpha_1-\beta_1} p_2^{4\alpha_2-\beta_2} \dots p_r^{4\alpha_r-\beta_r}.$$

A bal oldal nem osztható p_i egyikével sem, így $4\alpha_i - \beta_i = 0$ kell teljesüljön minden i-re. Ez azt jelenti, hogy

$$(2^{t-1} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r})^2 + 1 = 2^{4k-t-2},$$

azaz egy négyzetszámhoz 1-et adva kettő hatványát kell kapnunk.

Ez csak úgy lehetséges, ha a négyzetszám 0 vagy 1, mert $2^m = n^2 + 1$-ben, ha $m > 1$, akkor n páratlan kell legyen, s ekkor a jobb oldal 4-gyel nem osztható, míg a bal oldal igen. Esetünkben a négyzetszám 0 nem lehet, így $p_i = 1$ (y is csak kettőhatvány lehet), $t = 1$ következik, eredeti egyenletünket csak az $x = y = 2$ értékek elégíthetik ki, s ez megoldása is a feladatnak.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 20.

1103. Adott $AB = 5$ cm és $BC = 3$ cm hosszú szakaszokat csuklósan összekapcsolunk a B pontban. A csukló minden állásához megszerkesztjük az ACD egyenlő szárú háromszöget úgy, hogy $AD = CD$ és $ADC\sphericalangle = 40°$. Milyen csuklóállás ($ABC\sphericalangle$) mellett lesz a BD szakasz a legnagyobb?

Mészáros József, Galánta

I. megoldás: Rögzítsük az A és B pontokat. Ekkor C egy B középpontú, 3 cm sugarú körön mozoghat. Egy adott A, B, C ponthármashoz tartozó D ponthoz eljuthatunk az A pont körüli 70°-os forgatás, majd egy ezt követő A középpontú $\frac{1}{2\cos 70°}$ arányú középpontos hasonlóság egymás utáni alkalmazásával.

Ha a C pont az *egész* k kört befutja, akkor *elegendő* csak az egyik, a pozitív forgatási irányt vizsgálni *(3. ábra* a borítón*)*. Világos, hogy amíg C befutja k-t, addig D befutja a k kör forgatva-nyújtással kapott k' képét, s a k' minden pontjához tartozik a k-n egy megfelelő C pont. A B pont a k'-nek külső pontja, így a maximális BD szakaszt a B pont és a k' kör B' középpontjai által meghatározot egyenesen kapjuk (ábránkon BD_{max}) Könnyen belátható, hogy az $AB'B\triangle$ egyenlő szárú, hiszen $AB' = \frac{AB}{2\cos 70°}$, így világos, hogy $AB'D_{max}^{\sphericalangle} = 140°$, ez tehát a keresett csuklóálláshoz tartozó $ABC_{max}^{\sphericalangle}$ értéke is. A maximális hossz pedig

$$BD_{max} = \frac{5}{2\cos 70°} + \frac{3}{2\cos 70°} = \frac{8}{2\cos 70°}.$$

Könnyen általánosítható a feladat 70°-tól különböző szögekre is.

Dr. Marosvári Péter, Budapest

II. megoldás: Jól ismert az úgynevezett *Ptolemaiosz*-tétel (lásd: Skljarszkij—Csencov—Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 2/1., Geometria I., Tankönyvkiadó 1972., 136. feladat), amely szerint esetünkben:

$$BD \cdot AC \leqq CD \cdot AB + AD \cdot BC = CD(AB + BC) = 8\,CD,$$

azaz

$$BD \leqq 8\frac{CD}{AC}. \tag{1}$$

Az ACD háromszögben

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos 40°,$$

vagyis

$$AC^2 = 2\,CD^2(1 - \cos 40°) = 4\,CD^2 \sin^2 20°,$$

következésképpen

$$\frac{CD}{AC} = \frac{1}{2\sin 20°},$$

ami állandó. Ezért (1) miatt

$$BD \leqq \frac{4}{\sin 20°},$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $ABCD$ húrnégyszög, vagyis $ABC\sphericalangle = 140°$. A BD szakasz tehát akkor a legnagyobb, ha $ABC\sphericalangle = 140°$, BD maximális hossza ekkor $\frac{4}{\sin 20°}$.

Cseh László, Kolozsvár
Merényi Imre, Kolozsvár

A megoldók száma: 18.

1104. Határozzuk meg mindazokat az α valós számokat, amelyekre

$$\operatorname{tg}^2\alpha(1-\sin^{2n}\alpha)+ctg^2\alpha(1-\cos^{2n}\alpha) = \frac{\sin 2\alpha(2^n-\sin^n 2\alpha)}{2^{n-1}(2-\sin 2\alpha)}$$

fennáll és n pozitív egész!

Varga Zoltán, Nagyszalonta

I. megoldás: Az egyenletnek fenn kell állnia $n=1$ esetén. Ekkor

$$\operatorname{tg}^2\alpha(1-\sin^2\alpha)+\operatorname{ctg}^2\alpha(1-\cos^2\alpha) = \frac{\sin 2\alpha(2-\sin 2\alpha)}{2-\sin 2\alpha},$$

vagyis $$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = \sin 2\alpha,$$

és így $$\sin 2\alpha = 1,$$

tehát $$2\alpha = \frac{\pi}{2}(4k+1) \quad (k \text{ egész}),$$

amiből $$\alpha = \frac{\pi}{4}(4k+1)$$

kell legyen.

α-nak erre az értékeire, tetszőleges n esetén az eredeti egyenlőség bal oldala:

$$A = 1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}+1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = 2-\frac{1}{2^{n-1}},$$

jobb oldala: $$B = \frac{2^n-1}{2^{n-1}} = 2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

és ezért $A=B$.

Bagi Gábor, Barcs

II. megoldás: Egyenletünk értelmezve van, ha $\sin\alpha\cdot\cos\alpha \neq 0$ teljesül. Tekintsük az

(1) $$\sum_{i=1}^{n}(\sin^i\alpha-\cos^i\alpha)^2 = 0 \quad \text{kifejezést.}$$

A négyzetre emelések elvégzése és rendezés után

(2) $$\sum_1^n \sin^{2i}\alpha+\sum_1^n \cos^{2i}\alpha = 2\cdot\sum_1^n \sin^i\alpha\cdot\cos^i\alpha =$$

$$= 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\ldots+2\sin^n\alpha\cos^n\alpha =$$

$$= \sin 2\alpha+\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\sin^n 2\alpha \quad \text{adódik.}$$

Ez éppen három mértani sorozat, rendre $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$ és $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ hányadossal. Mivel ezek egyike

sem lehet 1, így (2) ekvivalens

$$(3)\qquad \sin^2\alpha\frac{\sin^{2n}\alpha-1}{\sin^2\alpha-1}+\cos^2\alpha\frac{\cos^{2n}\alpha-1}{\cos^2\alpha-1}=\sin 2\alpha\frac{\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)^n-1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha-1}\text{-gyel, illetve a}$$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ figyelembevételével:

$$(4)\qquad \operatorname{tg}^2\alpha(1-\sin^{2n}\alpha)+\operatorname{ctg}^2\alpha(1-\cos^{2n}\alpha)=\frac{\sin 2\alpha(2^n-\sin^n 2\alpha)}{2^{n-1}(2-\sin 2\alpha)}.$$

Ezért (1) és (4) gyökei megegyeznek, (1) azonban akkor és csak akkor teljesül, ha $\sin\alpha-\cos\alpha=0$, azaz

$$\alpha=\frac{\pi}{4}+\pi k.$$

Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy ezen α értékek valóban megoldásai eredeti egyenletünknek.

Csorba Ferenc, Győr,
Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza,
Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

A megoldók száma: 14.

1105. Az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle>90°$. Ha r, illetve R jelöli a háromszögbe, illetve a köré írt kör sugarát, m_b, illetve m_c a B, illetve a C csúcshoz tartozó magasságot, akkor bizonyítsuk be, hogy

$$r+R>\min(m_b, m_c)$$

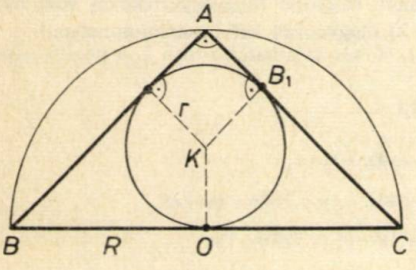
mindig teljesül!

Sándor József, Farcád

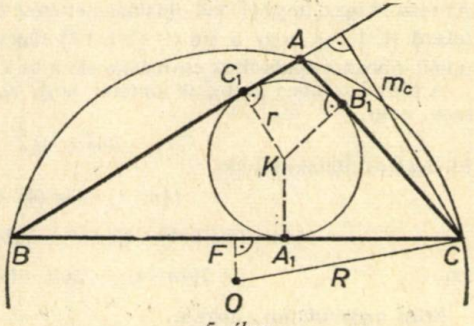
I. megoldás: A *4. ábrán* speciális eset látható: $BAC\sphericalangle=90°$, $AB=AC=m_b=m_c$. Ebben az esetben $AB_1=r$, $B_1C=CO=R$, tehát

$$m_c=AC=AB_1+B_1C=r+R,$$

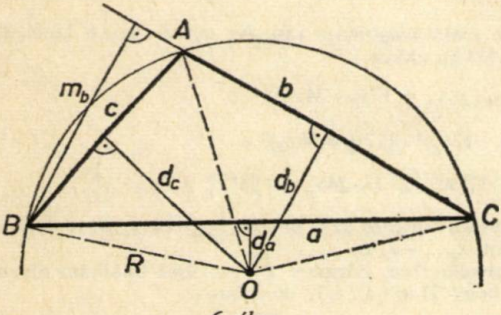
azaz ekkor az egyenlőség áll.



4. ábra



5. ábra



6. ábra

A feladat feltételeinek eleget tevő *5. ábrán* $AB\cong AC$, $\min(m_b, m_c)=m_c$. $BAC\sphericalangle>90°$ miatt $AB_1<KB_1=r$, $CB_1=CA_1<CF<CO=R$, így $\min(m_b, m_c)=m_c<AC=AB_1+B_1C<r+R$, amit igazolni kellett.

Kamarás Lajos, Pécs

II. megoldás: Az Érdekes matematikai gyakorló feladatok IV. (Tankönyvkiadó, Bp.) 126. feladata szerint tompaszögű háromszög esetében (a *6. ábra* jelöléseivel)

$$R+r=d_b+d_c-d_a.$$

Feltehetjük, hogy $a>b\geqq c$ teljesül, így

$$m_b \leqq m_c \quad \text{és} \quad \min(m_b, m_c) := m_b.$$

Az ABC háromszög kétszeres területe:

$$bm_b = bd_b + cd_c - ad_a.$$

$c \leqq b$ és $a > b$, így $cd_c \leqq bd_c$ és $ad_a > bd_a$ miatt

$$bm_b = bd_b + cd_c - ad_a < bd_b + bd_c - bd_a, \text{ azaz}$$

$$m_b < d_b + d_c - d_a = R + r, \text{ amit bizonyítani akartunk.}$$

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 15.

1106. Bizonyítsuk be, hogy a valós számok halmazán értelmezett $\sin x + \sin(x\cdot\sqrt{2})$ függvénynek nincs maximuma!

1984. évi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny.

Megoldás: A $\sin x$ függvény a helyi maximumát az $x=(4k+1)\frac{\pi}{2}$, a $\sin(x\sqrt{2})$ függvény pedig az $x=(4n+1)\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ helyeken veszi fel, ahol k, n egész számok. Ha volna olyan x_0, amelyre $\sin x_0 + \sin(x_0\sqrt{2})=2$ lenne, akkor az x_0 helyen a $\sin x+\sin(x\sqrt{2})$ függvény abszolút maximumát venné fel. Ez csak úgy lehetséges, hogy $\sin x_0=1$ és $\sin(x_0\sqrt{2})=1$. Ilyen x_0 természetesen nincs, hiszen nincs olyan k, n egész számpár, amelyre

$$(4k+1)\frac{\pi}{2} = (4n+1)\frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Az viszont igaz, hogy (1) két oldalának eltérése k és n alkalmas megválasztásával bármilyen kicsivé tehető. (Evidens, hogy a $\sin x+\sin(x\sqrt{2})$ függvény annál nagyobb függvényértékeket vesz fel, minél jobban megközelítik egymást a $\sin x$ és a $\sin(x\sqrt{2})$ függvények helyi maximumhelyei.)

A következőkben ki fogjuk mutatni, hogy bármely $\varepsilon>0$-hoz találhatók olyan k, n pozitív egészek, hogy

$$|(4k+1)\sqrt{2} - (4n+1)| < \varepsilon.$$

Ekvivalens átalakításokkal:

$$(4n+1)-\varepsilon < (4k+1)\sqrt{2} < (4n+1)+\varepsilon,$$

$$(4n+1)^2 - 2(4n+1)\varepsilon + \varepsilon^2 < 2(4k+1)^2 < (4n+1)^2 + 2(4n+1)\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$-2(4n+1)\varepsilon < 2(4k+1)^2 - (4n+1)^2 - \varepsilon^2 < 2(4n+1)\varepsilon. \tag{2}$$

Most megmutatjuk, hogy a

$$2x^2 - y^2 = 1 \tag{3}$$

egyenletnek végtelen sok $x=4k+1$, $y=4n+1$ alakú megoldása van. Az $x_1=1$, $y_1=1$ kielégíti (3)-at. Bebizonyítjuk, hogy ha x_p, y_p kielégíti (3)-at, akkor

$$x_{p+1} = 17x_p + 12y_p,\ y_{p+1} = 17y_p + 24x_p$$

is kielégíti, ugyanis:

$$2x_{p+1}^2 - y_{p+1}^2 = 2(17x_p+12y_p)^2 - (17y_p+24x_p)^2 =$$

$$= 2\cdot 17^2 x_p^2 + 4\cdot 17\cdot 12 x_p y_p + 2\cdot 12^2 y_p^2 - 17^2 y_p^2 - 2\cdot 17\cdot 24 x_p y_p - 24^2 x_p^2 = 2x_p^2 - y_p^2.$$

(E módszer a Pell-egyenletek elméletéből ismeretes.) Továbbá az is látszik, hogy ha x_p és y_p $4m+1$ alakúak, akkor x_{p+1} és y_{p+1} is ilyenek, valamint $x_{p+1}>x_p$ és $y_{p+1}>y_p$.

Ezután térjünk vissza a (2) egyenlőtlenség-rendszerhez. Bármely $0<\varepsilon<1$-hoz található olyan $x=4k+1$, $y=4n+1$ alakú megoldása (3-nak), hogy $2(4n+1)\varepsilon>1$, de ekkor

$$-1 < 2(4k+1)^2 - (4n+1)^2 - \varepsilon^2 < 1$$

fennáll, hiszen

$$2(4k+1)^2-(4n+1)^2-\varepsilon^2 = 1-\varepsilon^2,$$

márpedig $0<1-\varepsilon^2<1$.

Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 6.

A megoldók névsora (1101—1106.)

Ambrus Gabriella, Budapest (1101—1103., 1105.); Bagi Gábor, Barcs (1101., 1104.); Barta László, Nógrádmegyer (1101—1103., 1105., 1106.); Bencze Mihály, Brassó (1101—1105.); Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy (1101., 1103., 1104.); Boda Miklós, Pécs (1101., 1103.); Cseh László, Kolozsvár (1101—1105.); Csorba Ferenc, Győr (1101., 1102., 1104., 1105.); Fazekas Jánosné, Szeghalom (1101.); Földeák Árpád, Budapest (1101.); Hajna János, Pécs (1101., 1103., 1104.); Hárspatakiné Dékány Veronika (1101., 1102.); Horváth Tibor, Dunakeszi (1101.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1101—1105.); Kamarás Lajos, Pécs (1101—1106.); Kalácska József, Dunaradvány (1101.); Kirchnerné Kondor Judit, Budapest (1101., 1103., 1105.); Kiss Géza, Kisújszállás (1101., 1104.); Kiss László, Csíkszereda (1101., 1102., 1104—1106.); Körtesi Péter, Marosvásárhely (1101.); Major Piroska, Budapest (1101., 1102.); Dr. Marosvári Péter, Budapest (1101—1103.); Merényi Imre, Kolozsvár (1101—1105.); Mészáros József, Galánta (1101., 1103—1105.); Mészáros Mihály, Hejőkeresztúr (1101., 1102.); Mike János, Szeged (1101—1104.); Nagy Pál, Debrecen (1101.); Oláh György, Rév-Komárom (1101., 1105.); Sándor József, Farcád (1101—1103., 1105., 1106.); Szánthó Gyula, Gyula (1101., 1103.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (1101., 1102., 1104—1106.); Varga István, Nagyszalonta, (1101., 1102. 2 mód., 1103—1105.); Wekszli Árpád, Csorna, (1101., 1102., 1106.); Zalán Péterné, Budapest (1101.) Zábrádiné Schmierer Emilia, Budapest (1101—1103.)

Lapunk 1985. évi legeredményesebb feladat-megoldóit könyvjutalomban részesítettük:

Barta László, Nógrádmegyer
Bencze Mihály, Brassó
Cseh László, Marosvásárhely
Dr. Csorba Ferenc, Győr
Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza
Kamarás Lajos, Pécs
Merényi Imre, Kolozsvár
Sándor József, Farcád
Tuzson Zoltán, Marosvásárhely
Varga István, Nagyszalonta

Új könyvek

I.

ARNOLD, V. I.: *A mechanika matematikai módszerei,* Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 430 oldal, 90,— Ft.

BIZÁM GYÖRGY—HERCZEG JÁNOS: *Sokszínű logika* (175 logikai feladat), (2. kiadás), Budapest, 1985, Gondolat Könyvkiadó, 435 oldal, 60,— Ft.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER (szerk.): *Kézikönyv a matematika 4. osztályos anyagának tanításához* (2. kiadás), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 350 oldal, 43,— Ft.

FRIED ERVIN: *Klasszikus és lineáris algebra* (3., javított kiadás), Egyetemi tankönyv, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 275 oldal, 27,— Ft.

GÁDOR ENDRÉNÉ: *Tanári kézikönyv a szakközépiskolák II—IV. osztályos matematika tananyagának tanításához. C variáns,* Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 308 oldal, 40,— Ft.

HAJNAL IMRE—DR. NEMETZ TIBOR—DR. PINTÉR LAJOS: *Tanári kézikönyv a fakultatív „B" tantervű gimnáziumi matematika-tankönyvekhez,* Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 447 oldal, 55,— Ft.

KANTOR, I. L.—SZOLODNYIKOV, A. SZ.: *Hiperkomplex számok,* Budapest, 1985, Gondolat Könyvkiadó, 192 oldal, 32,— Ft.

KARLIN, SAMUEL—TAYLOR, HOWARD M.: *Sztochasztikus folyamatok,* Budapest, 1985, Gondolat Könyvkiadó, 536 oldal, 96,— Ft.

KORÁNYI ERZSÉBET: *Matematika, Tanári kézikönyv a gimnázium I—II. osztálya számára* (2. kiadás), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 275 oldal, 33,— Ft.

LŐCS GYULA: *A BASIC és a Kíváncsi*, Középiskolai szakköri füzet, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 235 oldal, 34,— Ft.

REIMANN JÓZSEF—TÓTH JULIANNA: *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika*, Matematika a műszaki főiskolák számára, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 269 oldal, 27,— Ft.

SZABÓ IMRE: *Rendszer- és irányítástechnika*, Egyetemi tankönyv, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 457 oldal, 50,— Ft.

SZÉP JENŐ—FORGÓ FERENC: *Introduction to the Theory of Games*, Budapest, 1985, Akadémiai Kiadó, 392 oldal, 460,— Ft.

SZÉPFALUSY PÉTER: *Univerzális törvényszerűségek nemlineáris rendszerek dinamikájában* (Értekezések, Emlékezések), Budapest, 1985, Akadémiai Kiadó, 31 oldal, 14,— Ft.

SZTRÓKAYNÉ FÖLDVÁRI VERA (szerk.): *Kézikönyv a matematika 8. osztályos anyagának tanításához*, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 467 oldal, 55,— Ft.

ÚJVÁRI ISTVÁN: *Felkészülés és felzárkózás matematikából az általános és középiskolai tanulók számára* (2. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 158 oldal, 23,— Ft.

WACZULIK MARGIT (válogatta és jegyzetekkel ellátta): *A táguló világ magyarországi hírmondói XV—XVII. század*, Budapest, 1984, Gondolat Könyvkiadó, 535 oldal, 78,— Ft.

II.

ÁBEL LAJOSNÉ—KECSEDI IMRÉNÉ—RÉVÉSZ JÓZSEFNÉ: *Útmutató a dolgozók általános iskolája 5—6. osztályos tankönyv és feladatlap használatához, Matematika*, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 58 oldal, 10,— Ft.

BALÁZSNÉ MÉHES VERA: *Számlétra*, Matematikai programozott képeskönyv Balázs Béla programozási rendszerének alkalmazásával, Budapest, 1985, Móra Könyvkiadó, 49 oldal, 36,— Ft.

DEMETROVICS JÁNOS—JORDAN DENEV—RADISZLAV PAVLOV: *A számítástudomány matematikai alapjai*, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 374 oldal, 49,— Ft.

GÁDOR ENDRÉNÉ—GYAPJAS FERENCNÉ—HÁRSPATAKINÉ DÉKÁNY VERONIKA—KORÁNYI ERZSÉBET—PÁLMAY LÓRÁNT—REIMAN ISTVÁN—SCHARNITZKY VIKTOR: *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából* (2. kiadás), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 478 oldal, 45,— Ft.

GILDE, WERNER—ALTRICHTER SIEGFRIED: *A józan ész furcsaságai* (2. kiadás), Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 147 oldal, 24,— Ft.

IRHÁS JÁNOS: *A fejszámolás titkai*, Budapest, 1984, a szerző kiadása, 150 oldal, 50,— Ft.

KURUTZNÉ KOVÁCS MÁRTA—SCHARLE PÉTER: *A végeselem-módszer egyszerű elemei és elemcsaládjai*, Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 164 oldal, 37,— Ft.

MÁRKI, L.—WIEGANDT, R. (editors): *Radical Theory*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 38, János Bolyai Mathematical Society, Budapest and Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam, 1985, 753 oldal, 660,— Ft.

PESCHEL, MANFRED: *Jelek és rendszerek modellezése*, Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 325 oldal, 65,— Ft.

POLLÁK, G.—SCHWARZ, ST.—STEINFELD, O. (editors): *Semigroups*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 39, János Bolyai Mathematical Society, Budapest and Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam, 1985, 501 oldal, 440,— Ft.

POPPER GYÖRGY: *A végeselem-módszer matematikai alapjai*, Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 158 oldal, 35,— Ft.

RECSKI, A.—LOVÁSZ, L. (editors): *Matroid Theory*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 40, János Bolyai Mathematical Society, Budapest and Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam, 1985, 439 oldal, 390,— Ft.

SCHRÖDINGER, ERWIN: *Válogatott tanulmányok* (2. kiadás), Budapest, 1985, Gondolat Könyvkiadó, 355 oldal, 54,— Ft.

SCHUMANN, HERMANN: *Kristálygeometria és a fémek rácstranszformációi*, Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 215 oldal, 77,— Ft.

STAAR GYULA (szerk.): *Bolyai-emlékfüzet*, A Kilátó különszáma 1985, Budapest, 1985, Tudományos Ismeretterjesztő Társulat, 56 oldal, ár nélkül.

Útmutató a kisegítő iskola 5. osztályának tankönyveihez. 2. Matematika, ének-zene, technika, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 310 oldal, 38,— Ft.

WOSCHNI, E. G.: *Becslési eljárások az automatikában*, Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 91 oldal, 31,— Ft.

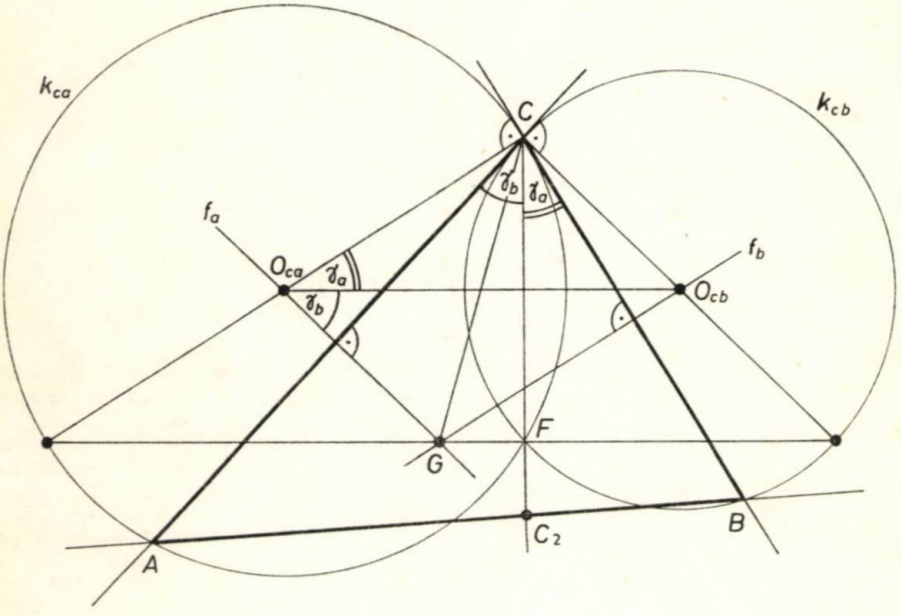
Dr. Scharnitzky Viktor

Ára: 7,— Ft

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

VERSECZHY KÖNYVTÁR SZOLNOK



1986. június * XXXIII. évfolyam 3 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

86-849 — Szegedi Nyomda — F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V. József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42, — Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését, *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

TARTALOM

Dr. Sümegi Lászlóné: Matematikaórák tematikus tervezése 65
Dr. Ambrus András: Zsebszámológép használata a matematikaoktatásban a Német Szövetségi Köztársaságban 71
Dr. Urbán János: A gimnáziumi matematikatanítás korrekciójának tervéről ... 76
Zorgel Ferenc: Két megjegyzés az I. osztályos gimnáziumi anyag tanításához 79
Dr. Rédling Elemér: A hasonlósági transzformáció definícióiról 80
Schuster Gyula: Igaz-e? 83
Dr. Filep László—dr. Rozgonyi Tibor: Beszámoló a tanárképző főiskolák hallgatóinak 1985. évi matematikai tanulmányi versenyéről 86
FELADATOK 91

СОДЕРЖАНИЕ

д-р Шюмеги Ласлоне: Тематическое планирование уроков математики 65
д-р Амбруш Андраш: Применение карманных ЭВМ в обучении математике в ФРГ 71
д-р Урбан Янош: О плане коррекции программы математики в гимназии 76
Зоргел Ференц: Два замечания к обучению материалу по математике в I классе гимназии 79
д-р Редлинг Элемер: Об определениях преобразования подобия 80
Шустер Дюла: Верно ли? 83
д-р Филеп Ласло — д-р Розгони Тибор: О соревновании студентов пединститутов по математике 1985 г. 86
ЗАДАЧИ 91

INHALT

Frau Margit Sümegi (geb.: *Sal*): Thematische Planung der Mathematik-Lehrstunden 65
Dr. Ambrus, András: Die Verwendung von ETR in dem Mathematikunterricht im BRD 71
Dr. Urbán, János: Über den Plan der Korrektion des Mathematikunterrichts im Gymnasium 76
Zorgel, Ferenc: Zwei Bemerkungen zum Unterricht des Lehrstoffes in der I. Klasse des Gymnasiums 79
Dr. Rédling, Elemér: Über die Definitionen der Ähnlichkeitstransformation 80
Schuster, Gyula: Stimmt das? 83
Dr. Filep, László—dr. Rozgonyi, Tibor: Bericht über den mathematischen Wettbewerb der Studenten der Pädagogischen Hochschulen im Jahre 1985 86
AUFGABEN 91

DR. SÜMEGI LÁSZLÓNÉ
szakfelügyelő
Debrecen

Matematikaórák tematikus tervezése

A végleges matematika-tanterv bevezetését közvetlenül követő időszak próbálkozásai — az egyes témák mozaikszerű tanítása, az „egy órán több téma" elképzelés — nem hozták meg a várt eredményeket. A gyakorló tanárok visszajelzései, a folyamatosan végzett felmérések tapasztalatai a felső szakvezetés figyelmét is az egyes témák egy tömbben történő feldolgozása felé irányították. A „lépcsőzetesen" megjelent felső tagozatos matematikatanári kézikönyvek közül a 7. osztályosban található tananyagfelosztás már ezt a tendenciát erősíti.

A tananyag feldolgozásának időbeli elosztása mellett azonban kiemelt jelentősége van a *tematikus tervezésnek.*

„A témákban való gondolkodás pedagógiai értéke abban áll, hogy a tantárgyi tervezés ebben a keretben valósíthatja meg a tanítás és a nevelés korszerűsítésének számos törekvését. Mivel a tanítás a tanulás tudatos, *tervszerű* irányítása; közelebbi és távolabbi célokat megközelítő *hatásfolyamat*, ennek szakaszai és mozzanatai csak a célok tudatos előrelátásával valósulhatnak meg és kapcsolódhatnak egymáshoz fejlesztő hatással."

Ennek a tanulmánynak nem az a célja, hogy a tematikus tervezés pedagógiai és metodikai előnyeit taglalja, hiszen a Pedagógiai Kézikönyv megfelelő fejezetében igen alapos, minden tantárgyra alkalmazható útmutatást találnak a szaktanárok. Ezeknek az elveknek a gyakorlatba való átültetése, az egyes tantárgyakra történő vonatkoztatása a gyakorló tanárok feladata; ehhez kíván segítséget nyújtani ez az összeállítás.

A matematika témáinak tanítása során felvetődik a kérdés: hogyan kell megtervezni az egyes órákat, hogy azok láncszemként kapcsolódjanak az adott téma tanításának folyamatába. Ez a feladat nem könnyű. Eredményes megoldásának alapfeltétele a tantervben és követelményrendszerében való tájékozottság, a téma tanításának előzményei, az adott tanulócsoport összetételének, felkészültségének ismerete, a tanulói dokumentumok feladatanyagában való jártasság, és amiről már az előzőkben is szóltam: a *témákban való gondolkodás.*

E feltételek birtokában kellő gondossággal és ötlettel össze lehet válogatni és el lehet rendezni az egyes tanórai feladatokat. Olyan problémából kell kiindulni, „amelynek a megoldására még képesek a tanulók, ezután adunk nekik egyre fokozódó nehézségű problémasort, amelyben a megoldásokat az előzőleg szerzett tapasztalatok segítik". A jól tervezett feladatsor az óra gerincét adja és egyúttal megteremti a *differenciált munka* lehetőségét, valamint *más témakörök felidézését*, az ismeretek mélyítését.

A házi feladat kijelölése is igen nagy körültekintést igényel, funkciója többirányú: segíti az órán tanultak rögzítését, gyakorlását és biztosítja az ismeretszerzési folyamat töretlenségét. Ez utóbbi követelményt a témában való gondolkodás szellemében úgy valósítjuk meg, hogy a következő órán megbeszélésre, megoldásra kerülő feladatsor első feladatát házi feladatként már az előző óra végén kitűzzük. Ilyen tervezéssel, szervezéssel megelőzhetjük azt, hogy az egyes tanítási órák széttördeljék a tanulás folyamatát.

A következőkben a témában való gondolkodás néhány láncszeme kerül bemutatásra. A leírtak nemcsak íróasztal-

szülemények, mindhárom téma tanórai kipróbálásra is került: az „élő" jelleget a leírásmód is tükrözi. Mind a kidolgozásuk, mind a megvalósításuk szaktanári erőfeszítés eredménye, a cikk írója — e témák ismertetésén kívül — a koncepció kidolgozása, népszerűsítése, a szaktanácsadás területén tevékenykedett.

6. osztály *Téma: Sokszögek*

I. A házi feladat — „Hány oldalú az a sokszög, amelynek szögösszege 1440°, illetve 2160°?" — minőségi ellenőrzése során felelevenítésre kerültek olyan előzetes ismeretek, amelyek szükségesek az óra feladatsorának megoldásához.

II. Transzparensről vetített mértékváltási feladat — önálló megoldás —

0,38 m = mm = dm = cm,
490 000 cm^2 = m^2 = dm^2,
1° = ′ = ″.

Rövid értékelés, megbeszélés, a helyes megoldás szintén kivetítésre került.

A nevelő közölte az osztállyal: „azért elevenítettük fel ezeket a mértékváltásokat, mert a mai órán szükségünk lesz rá".

III. Ábrázoljátok koordináta-rendszerben az

$A(4; 0)$, $B(12; 0)$ pontokat!

Adjátok meg a C pont koordinátáit úgy, hogy az ABC háromszög
a) tompaszögű,
b) derékszögű,
c) hegyesszögű háromszög legyen!

A tanulók önállóan, lyukas táblán dolgoztak.

Differenciált munkát lehetővé tevő feladat: Hány lehetőség van a C pont elhelyezésére *a)*, *b)* és *c)* esetben? Hol nem lehet a C pont? Miért?

Adjátok meg a C pont koordinátáit úgy, hogy az ABC háromszög
d) egyenlő szárú,
e) egyenlő oldalú legyen!

A lyukas táblán nincs olyan „megfelelő" pont, amely az *e)* követelménynek eleget tesz. Csírájában fojtja el az e ténnyel kapcsolatos tévhitet (ti. hogy nincs ilyen pont) a következő feladat.

IV. Szerkesszünk olyan ABO szabályos háromszöget, amelynek oldalai 4 cm-esek!

Vázlat került a táblára; a szerkesztés menetét megbeszélték; a szerkesztés önálló munka. A szerkesztést tanári útmutatás előzte meg: „új oldalra szerkesszetek, hogy legyen a háromszög körül szabad hely! Az utolsó lépésben szerkesztett csúcsot jelöljétek O-val!

Számítsátok ki a háromszög kerületét, külső és belső szögeinek nagyságát, határozzátok meg a háromszög területét! (A tanulók merőlegest szerkesztenek, magasságot mérnek.)

A helyes megoldás kivetítése után fogalmakat és igaz állításokat elevenítenek fel: külső, belső szög, a háromszög külső, belső szögeinek összege.

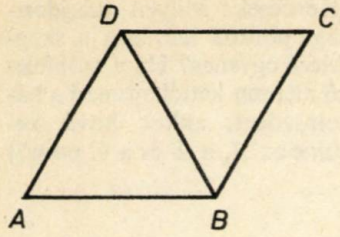
V. A síkidomkészlet egybevágó szabályos háromszögeiből rakjatok össze kettőt egy oldaluk mentén!

Milyen síkidomot kaptál? (1. ábra)

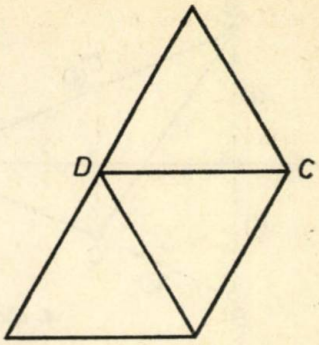
Helyezzük el a síkidomot a négyszögek halmazában!

A négyszög neve, tulajdonságai.

Szerkesszétek meg a négyszöget! (Az előbbi szerkesztést fel lehet használni. $AB = BC = OB = 4$ cm.)



1. ábra



2. ábra

Számítsuk ki a síkidom kerületét, területét, külső és belső szögeinek nagyságát!

A probléma megoldása során felelevenítették a külső és a belső szögek összegére vonatkozó megállapításokat, a paralelogramma szögeivel kapcsolatos ismereteket.

VI. Építsük tovább a síkidomot! Illesszünk mellé még egy szabályos háromszöget! (*CO* legyen a közös oldal!)

Milyen síkidomot kaptatok? (2. ábra)

Helyezzük el a síkidomot a négyszögek halmazában.

A síkidom neve, tulajdonságai.

Szerkesszétek meg a síkidomot — az előbbi szerkesztés felhasználásával!

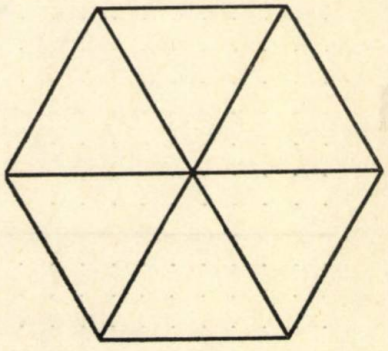
Határozzátok meg a kerületét, területét, külső és belső szögeinek összegét!

Differenciált feladat: gondolkozzatok azon, hogy tulajdonképpen hány adatból szerkesztettük meg *ezt* a szimmetrikus trapézt!

VII. Rakjatok ki az egybevágó szabályos háromszögekből szabályos hatszöget! (3. ábra)

Hány darabot használtatok fel egy ilyen síkidom kirakásakor?

Határozzátok meg a szabályos hatszög kerületét és területét az ismert adat és az előbbi számítások felhasználásával!



3. ábra

VIII. Házi feladat

1. Szerkeszd meg a szabályos hatszöget!

Számítsd ki külső, belső szögeinek összegét!

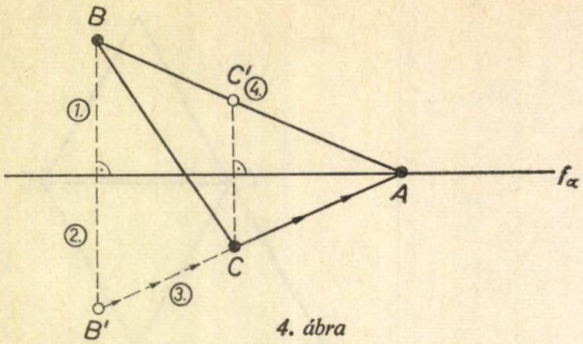
2. Egy háromszög egyik szöge 15°-kal kisebb, egy másik szöge 15°-kal nagyobb a harmadik szögénél. Szerkesszétek meg ezt a háromszöget, ha egyik oldala 3 cm!

A **VIII. 2.** feladat egyben a következő óra kezdő feladata, amely a kreativitás készségének fejlesztésére is alkalmas.

7. osztály *Téma: Háromszögek* (Kettős óra, 2×45 perc időtartam.)

1. Adott egy háromszög *B* és *C* csúcspontja és az f_α szögfelező egyenese.

2. Hogyan szerkesztenéd meg a háromszöget? Készíts vázlatrajzot, és rajzold le a szerkesztés menetét! (4. ábra)



4. ábra

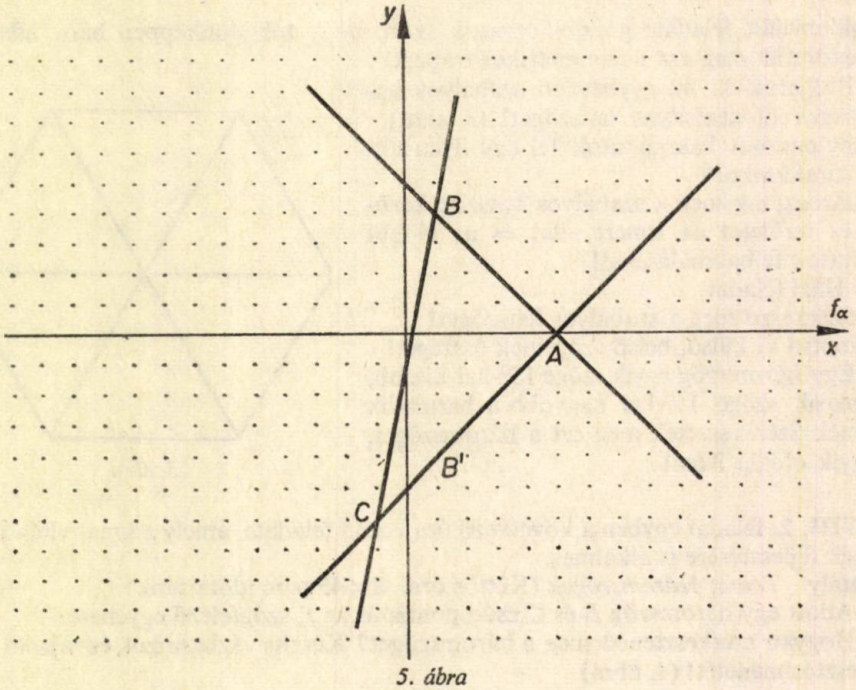
(Kérdések: Milyen tulajdonságú pontok halmaza a szögfelező egyenes? Ha a szögfelező mentén kettéhajtanád a háromszöget, akkor hová kerülne az A, a B és a C pont?)

3. Az ismert adatok koordináta-rendszerben a következők:
$B(1;4)$, $C(-1;-6)$, f_a olyan pontokból tevődik össze, amelyeknek a második koordinátája nulla.
Mi ennek az egyenesnek az egyenlete? $y=0$.

4. Add meg a C' és a B' pontok koordinátáit a pontok ábrázolása nélkül! Hogyan kereshetők meg ezek a pontok?

5. Rajzold meg a háromszöget!
Mi az A csúcspont két koordinátája?

6. Rajzold meg a háromszög oldalegyeneseit! Add meg az egyenesek egyenletét! (5. ábra)
Tanári útmutatás: Készíts az ismert pontok segítségével táblázatot! Olvasd le az ábráról, hogy hol metszi az egyenes az y tengelyt, mekkora a meredeksége!



5. ábra

7. Milyen helyzetű a b és a c egyenes? Milyen típusú a háromszög?

8. Hol van a háromszög köré írható kör középpontja? (Útmutatás: Thalesz tétele.)

9. Rajzold meg az a oldalhoz tartozó magasságot, és írd fel az egyenes egyenletét!

10. Hol van a háromszög magasságpontja? (Melyek a háromszög „másik két oldalához" tartozó magasságvonalak?)

11. Rajzolj olyan egyenest, amely két egyenlő területű háromszögre osztja az ABC háromszöget! Indokold a választást!

12. Hány ilyen tulajdonságú egyenest találtál? Mi ezeknek a neve?

13. Elképzelhető, hogy a három súlyvonalon kívül van még olyan egyenes, amely egyenlő területű részekre osztja az ABC háromszöget?

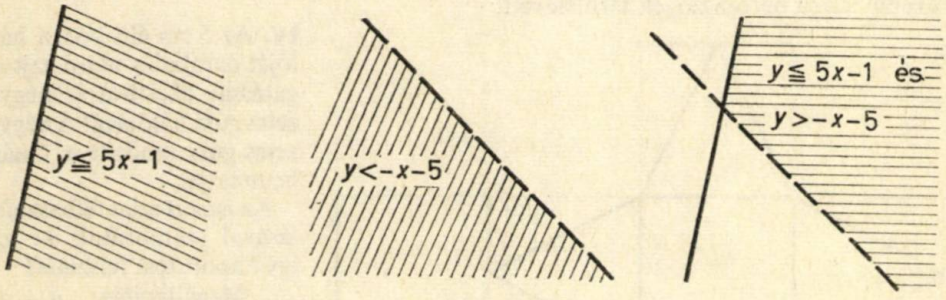
14. Írd fel a súlyvonalak egyenletét!

15. Milyen kérdést vet fel az alábbi egyenlőség:
$$-7x-11 = 5x-1?$$

16. Adj választ a kérdésre a grafikon segítségével! Mondd el a módszer lényegét! (Egy tanuló közben a másik táblán algebrai úton is megoldja az egyenletet.)

17. Írj fel olyan egyenleteket, amelyeknek a gyöke leolvasható az ábráról!

18. Add meg a megjelölt ponthalmazt jellemző egyenlőtlenséget vagy egyenlőtlenség-rendszert! (Az írásvetítő segítségével kivetített, színes fóliával letakart félsíkok közös részének ponthalmazát kell vizsgálni. 6. ábra.)



6. ábra

19. Add meg az ABC háromszög belső pontjait jellemző egyenlőtlenségeket!

20. Olvass le az ábráról más egyenlőtlenségeket és egyenlőtlenség-rendszereket, és add meg a hozzájuk tartozó ponthalmazt!

21. Hány négyzetcentiméter a háromszög területe? (Terület átdarabolásával, kiegészítésével próbálkozz!)

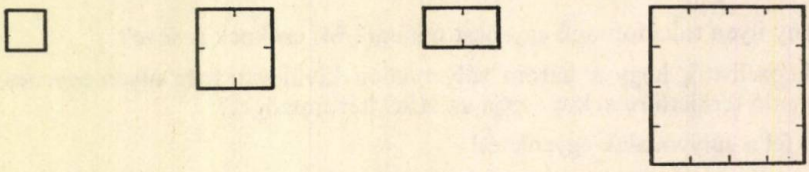
22. Szerkeszd meg a háromszöget euklideszi szerkesztéssel!

23. Vizsgáld meg, hogy milyen helyzetű legyen az adott egyenes és a két pont, hogy a feladatnak
a) ne legyen megoldása,
b) végtelen sok megoldása legyen,
c) egy megoldása legyen!

6. osztály *Téma: Sokszögek, térgeometria*
(Terület- és felszínszámítás)

I. Házi feladatként a tanulók mindegyike rajzlap felhasználásával elkészítette egy 5 cm élű kocka hálóját, valamint 3 darab egybevágó téglalapot, amelynek méretei: $a=3$ cm, $b=5$ cm. A téglalapot füzetben meg is szerkesztették.

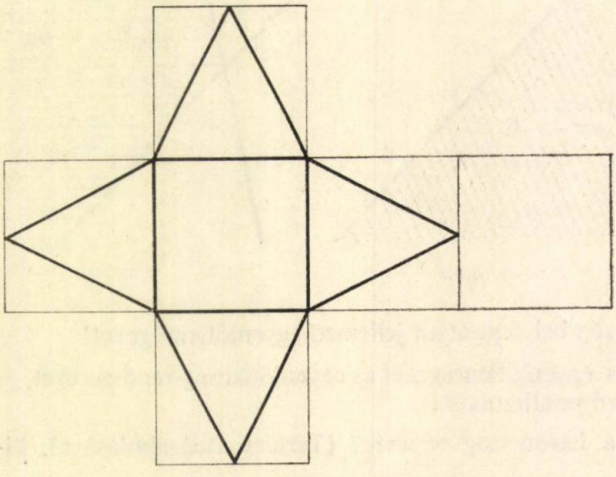
II. Az elkészített téglalap területe mértékszámának meghatározása különböző (7. ábra) területegységek esetén. (A tanulók a négyzetrácsos füzet rácshálójának segítségével önállóan dolgoztak.) A megbeszélés során a mértékegység és az adott terület mérőszáma között fennálló fordított arány felismertetésére is sor került.



7. ábra

III. Az alábbiak szerint daraboljátok a téglalapokat:

1. Vágjátok ki a lehető legnagyobb területű egyenlő szárú háromszöget úgy, hogy a legyen az alapja! Területét hasonlítsátok össze a téglalapéval!
2. Vágjátok ki úgy a lehető legnagyobb területű egyenlő szárú háromszöget, hogy b legyen az egyenlő szárú háromszög alapja! Az így nyert területtel kapcsolatban mit tapasztaltok?
3. A harmadik téglalapból vágjátok ki a lehető legnagyobb területű derékszögű háromszöget! Területének nagyságát hasonlítsátok össze a téglalap, valamint az egyenlő szárú háromszögek területével!



8. ábra

IV. Az 5 cm élű kocka hálóját darabolás utáni hajtogatással alakítsátok négyzetes gúla hálójává! A négyzetes gúla modellt a tanár bemutatja.

Az ismert adat felhasználásával számítsátok ki az így kapott test felszínét!

Megállapítás: $A_{\text{gúla}} = 3t_{\text{négyzet}}$ (8. ábra).

Igaz-e ez az összefüggés a bemutatott gúlamodellre is? (Mérés után indokolj!)

V. A gúlamodell szükséges adatainak lemérése után határozzátok meg annak felszínét!

Szerkesszétek meg a hálóját 1:5 arányban kicsinyítve!
Számítsátok ki az így kapott test felszínét!

VI. „Következtessünk vissza az eredetire!"
Milyen összefüggés van a hosszmértékek aránya és a területek aránya között?
A problémát frontális munkával oldották meg.

A bemutatott tanóra-felépítések segítségével azt kívántam érzékeltetni — a feladatsor tervezése mellett! —, hogy a tematikus gondolkodás, tervezés, megvalósítás nem zárja ki más témakörök erősítését, gyakorlását. Ellenkezőleg: segíti úgy, hogy az ismeretszerzés folyamatát nem tördeli szét mozaikokra. Lehetővé teszi a differenciált munkáltatásnak egy, már az előbbiek* folyamán ismertetett módját.

Már a bevezetőben említés történt arról, hogy az ilyen módon végzett tervezés nem könnyű feladat: sok időt és energiát igényel. Sajnos, a jelenleg rendelkezésünkre álló tanulói-tanári dokumentumok, segédletek nem segítik kellő mértékben az ilyen alkotó módon való tanítást. Kollégáim véleménye az, hogy több konkrét segítségre lenne szükség: hasonlóra, mint amit az 5. és 6. osztályok számára készült Feladatrendszerek nyújt.

DR. AMBRUS ANDRÁS
egyetemi adjunktus
Budapest

Zsebszámológép használata a matematikaoktatásban a Német Szövetségi Köztársaságban

Dr. Hartwig Meissner, a Münsteri Westfaliai Egyetem matematika-didaktika professzora a Bolyai János Matematikai Társulat meghívására 1985 szeptemberében Budapesten tartózkodott. A Nemzetközi Matematikatanítási Bizottság (ICME) legutóbbi három világkongresszusa „Zsebszámológép és computer" szekciójának vezetője nagy sikerű előadást tartott a magyar matematikatanárok részére a zsebszámológép iskolai használatáról. Az előadás és a vendéggel történt konzultációk alapján röviden vázoljuk a zsebszámológép bevezetésének NSZK-beli tapasztalatait és néhány — az előadáson is nagy sikert aratott — feladatot, játékot ismertetünk.

Az NSZK tizenegy tartományában nincs egységes helyzet, az egyes tartományok minisztériumai döntenek a zsebszámológép iskolai bevezetéséről. Észak-Rajna Westfaliában — ahonnan Meissner professzor érkezett — már az elemi iskola 1. osztályától megengedett a gép használata, viszont Baden—Württemberg tartományban a nyolcadik osztály befejezéséig tilos a használata. A tartományok túlnyomó többségében hetedik osztálytól kezdve kerül bevezetésre a zsebszámológép.

A Münsteri Egyetemen Meissner professzor vezetésével 1976-ban kísérlet indult a zsebszámológép bevezetésének vizsgálatára. A kísérlet pozitív eredményeinek köszönhető, hogy Észak-Rajna Westfalia tartományban már első osztályban megengedett a gép használata. Az alsó tagozatos bevezetés tapasztalatairól „A tanító" című folyóiratban beszámoltunk. Itt csak néhány dolgot emelnénk ki: a fejszámolás fontosságát olyan versenyek élményei tudatosították a tanulókban, amikor bár megengedett volt a kalkulátor használata, de fejben sokkal gyorsabban el lehetett érni a végeredményt. Ilyen esetekben a tanárok külön is felhívták a figyelmet arra a tapasztalatra, hogy a kellően gyakoroltatott agy némely esetben gyorsabb, ilyenkor ne a gépet használják. A gép alkalmazása lehetővé teszi az életből vett számok használatát.

Igen tanulságos eredményt hozott a több, mint 1000 tanulóról készített videofelvétel tanulmányozása, amely szerint a tanulóknak kb. 90%-a rendelkezett valamilyen stratégiával az aritmetikai feladatok zsebszámológéppel való megoldása során. A kalkulátor bevezetése lehetővé teszi a próbálkozások soroza-

* A Matematika Tanítása, 1985. 5. sz.

tát, a tervszerű próbálkozásnak mint módszernek az alkalmazását a matematikaórákon. Sokfajta számológépes játék igényli a tanulóktól becslések, közelítések alkalmazását, ami fejszámolást követel meg, és a tanulók úgynevezett „számérzetét" is fejleszti. („Számérzet" a számok ún. nagyságrendjének helyes felfogását, a számok közötti viszonyok, műveletek ismeretét, a különböző számkörök birtoklását jelenti.) Ki kell emelni még a zsebszámológép kontroll-szerepét mint gyors visszajelző eszköz, jelentős motiváló tényező.

A zsebszámológép felső tagozaton való bevezetésének céljai:

1. Gyorsabb, biztosabb számolás. (Az írásbeli műveletek szerepe háttérbe szorul, hiszen a gép azokat gyorsabban és megbízhatóbban végzi el. Meissner professzor véleménye szerint a meghibásodás miatt célszerű az írásbeli összeadás és az egyjegyű számmal való szorzás algoritmusát megtanítani s megkövetelni.)
2. Szabályok felfedezése.
3. Számkörbővítések elősegítése, hatékonyabbá tétele.
4. Függvényfogalom kialakítása. Zsebszámológép segítségével a tanulók sok összetartozó értékpárt tudnak meghatározni, de a függvénytulajdonságok vizsgálatát is pozitívan segíti elő a gép, megsejtenek növekedési, fogyási viszonyokat stb.
5. Fontos, tanulást elősegítő eszköz a gép, és természetesen igen fontos ellenőrzési eszköz.
6. Problémamegoldás hatékonyabbá tétele.
7. Valószínűségszámítás, statisztika témakör feldolgozása.
8. Bizonyos közelítő eljárások realizálása. (Kör területe, kerülete stb.)

A továbbiakban néhány számológépes játékot, feladatot ismertetünk. Több feladat, játék alsó tagozaton is megoldható, de úgy véljük, hogy az 5. osztályban még újra elővehető ismétlési céllal.

1. *BINGO.*

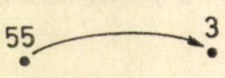
361	817	133	529	448
247	688	304	989	644
784	299	364	91	256
169	532	196	368	437
301	112	161	208	559

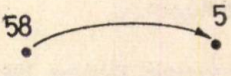
A következő számok felhasználásával — ezek közül a számok közül szabad választani a tényezőket — írjuk fel szorzat alakjában a fenti számokat: 7, 13, 16, 19, 23, 28, 43.

2. *Tiltott gombok.*

Minden tiltott a következő gombok kivételével: [5] [8] [+] [−] [×] [÷] [=]

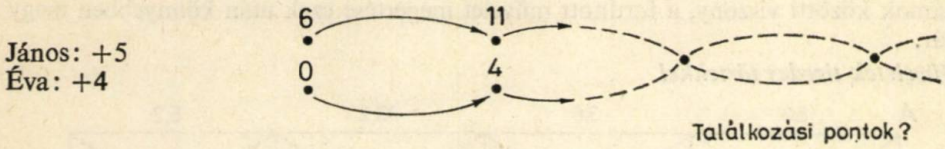
Állítsd elő:





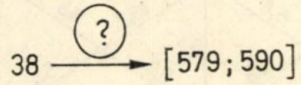
Állítsd elő a 0,5; 0,1; −1,5; 8,5 számokat!
1 gombnyomás 1 Ft-ot ér; az nyer, aki a legolcsóbb megoldást megtalálja.

3. *Közös többszörös fogalmának előkészítése.*



4. *Célbadobás.*

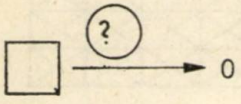
Két játékos játszhatja a játékot. Egyikük kijelöl egy szorzótényezőt, és megadja azt az intervallumot, amelybe az eredménynek bele kell esnie. Feladat a másik szorzótényező meghatározása. Példa:



Ha a zsebszámológép rendelkezik az ún. konstansautomatával, akkor a 38-cal való szorzási utasítást célszerű tárolni [3] [8] [×] [3] [8] [=] gombnyomás-sorozattal. Ezek után elegendő a tippelt számot bevinni a gépbe és az egyenlőséggombot benyomni. Ajánlatos táblázatot készíttetni a tanulókkal, így jobban átlátják munkájukat, próbálkozásaik rendezettebbek lesznek. Nehezíthető a feladat a célintervallum szűkítésével, amikor is a tizedes törtek megjelenése e számokkal való bánásmódot is jól fejleszti.

A nagy Nulla.

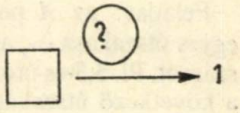
A tárolóba egy adott szám kivonása van betárolva. Ezt az egyik játszófél rejti el úgy, hogy versenytársa ne lássa. Társának feladata a rejtett szám kitalálása, azaz olyan bevitel elérése, amelyre a kijelölt kivonást elvégezve 0-t kapunk eredményül. A játék sémája:



Jó lehetőséget biztosít e játék a negatív számokkal való bánásmód fejlesztésére, e számok közt az ún. „nagyságérzet" finomítására, biztosabbá tételére.

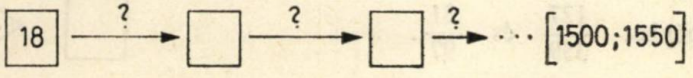
A nagy Egyes.

Egy adott számmal való osztást viszünk be a tárolóba. A cél olyan beviteli adat elérése, amelyre a kijelzőn 1-es jelenik meg, azaz a bevitt szám kitalálása. Séma:



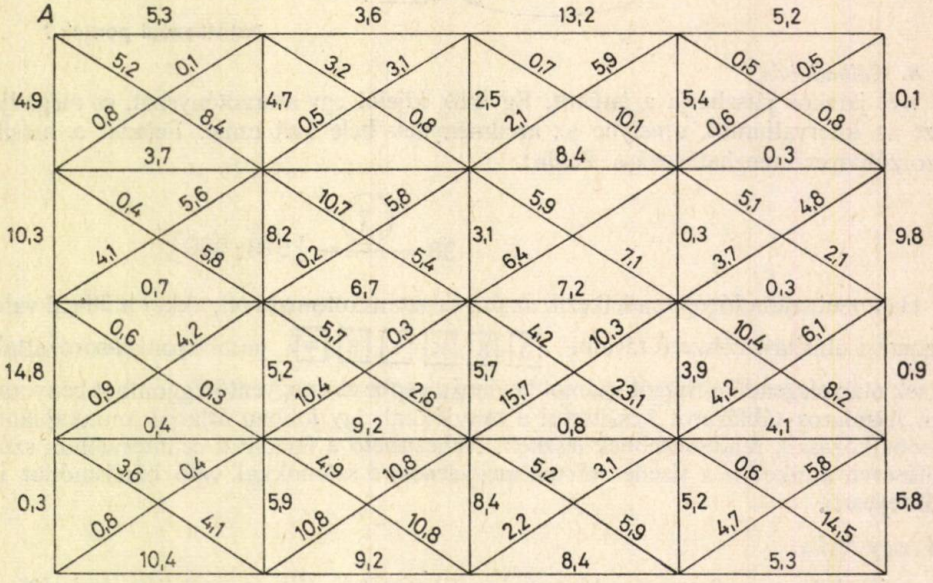
Faktorkeresés.

Egy előre megadott startszámhoz és egy rögzített célintervallumhoz olyan tényező megtalálása, amelynek a startszámmal való szorzata a célintervallumba esik. Ha ez az első kísérletre nem sikerül, akkor a második lépésben az előbb kapott szorzat lesz a startszám, amihez kell alkalmas tényezőt keresni, hogy az újabb szorzat a célintervallumba essen. Példa:

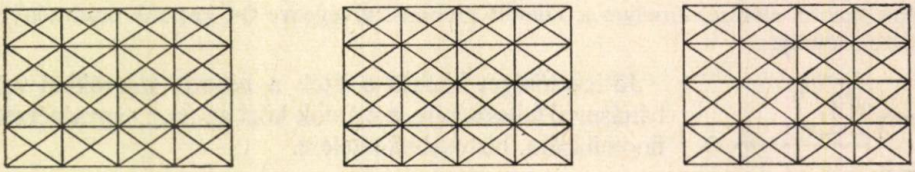


Az előbbi játékok esetén az ún. „Egyirányú utca elvét" kell alkalmazni, amelynek lényege az, hogy a fordított művelet használata nem szükséges — sőt a játék során nem is megengedett — ezért a tanulóknak próbálkozniuk kell, a gyorsabb eredmény eléréséhez ügyes stratégiát kell kidolgozniuk, becsléseket kell alkalmazniuk. A számok közötti viszony, a fordított művelet megértése ezek után könnyebben megy már.

Műveletek tizedes törtekkel.



Próbálkozások:



Feladat: az *A* pontból a *B* pontba kell eljutni olyan feltétellel, hogy minden egyes útszakasz —, amin végigmegyünk — „számával" szorozni kell a már meglevő számot. Pl. 5,3-es úton elindulva a 3,2-es útra térve az 5,3 ·3,2 szorzatot kell képezni, a következő útszakasz számát e szorzattal kell megszorozni és így tovább. Az nyer, aki a legalacsonyabb, a legkisebb számot kapja a célba érkezéskor. Ügyes tanulók rájönnek, hogy érdemes olyan „köröket" csinálni, amelynek minden száma 0 és 1 közötti szám, hiszen ez nagyon lecsökkenti a szorzat értékét.

Törtek összeadása.

Gyakori tanulói hiba különböző nevezőjű törtek összeadásakor, hogy a számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezővel adják össze a gyerekek. E hiba kiküszöbölésére jó az alábbi gyakorlat:

Vidd be a gépbe: $\frac{127}{359}$ és $\frac{31}{97}$.

Vidd be: $\frac{127}{359}$, $\frac{31}{97}$ és $\frac{127+31}{359+97}$.

□ < □ < □

Folytasd: □ < □ < □ < □ < □

Általánosítás: A fenti módon végrehajtott „összeadás" eredménye mindig a két szám közé esik!

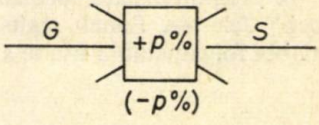
Vizsgáljuk meg ezután analóg módon: $\frac{127}{359}$, $\frac{31}{97}$ és $\frac{127}{359}+\frac{31}{97}$.

□ < □ < □

Tapasztalják a tanulók, hogy az összeg mindkét tagnál nagyobb lesz. Remélhető, hogy a sok adat meggyőzi őket az első eljárás helytelenségéről.

Százalékszámítás.
G — alapérték
p — százalék
S — növelt (csökkentett) alapérték

Séma:



A százalékszámítás három alapfeladatát is célszerű a már említett „Egyirányú utca elve" segítségével gyakoroltatni. A tanulóknak becsléseket, közelítéseket kell alkalmazniuk, a százalékérzetük fejlődik, stabilabbá válik.

G	p	S (G+G-nek p%-a)	
635	6	?	
635	?	673,1	(38,1)
?	6	673,1	(38,1)

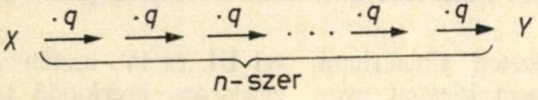
A tanulók tapasztalatot szereznek a gyakorlások során arról, hogy ugyanazt azt eredményt adja

$G \xrightarrow{+6\%} S \longmapsto G \xrightarrow{\times 1{,}06} S$

azaz szorzásról van szó, bár a gépen +6%-ot ütünk be.

Jó előkészítő gyakorlatokat lehet végeztetni az ún. kamatos kamat jellegű problémákkal kapcsolatban. Természetes, hogy itt még csak próbálkozások sorozatáról van szó, de a tapasztalatokat elemezve mélyebb betekintést nyernek a tanulók a problémába.

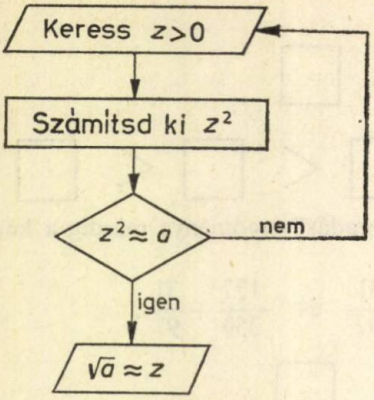
Séma:



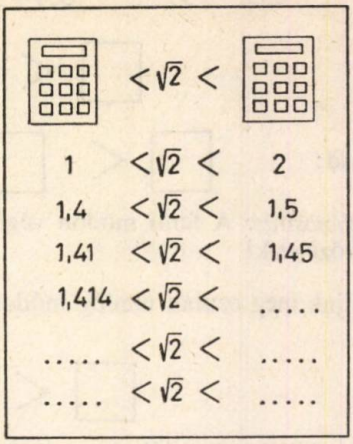
Lehetséges feladattípusok:

X adott,	q adott,	n adott,	Y keresett,
X adott,	q adott,	n keresett,	Y adott,
X adott,	q keresett,	n adott,	Y adott,
X keresett,	q adott,	n adott,	Y adott.

$\sqrt{a}$ intuitív előkészítése, közelítés.



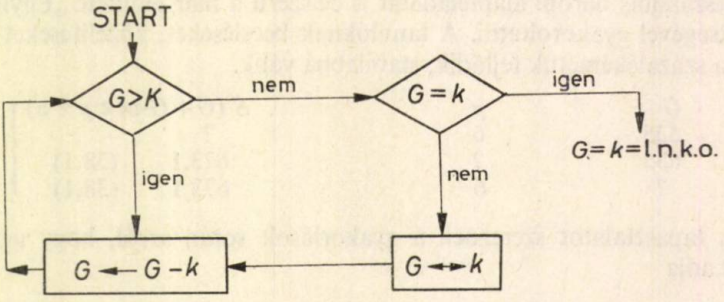
Számítsd ki $\sqrt{2}$ közelítő értékeit!



Folyamatábrák, programozás előkészítése.

A programozható zsebszámológépek rendelkeznek az ún. „tároló—csere gombbal." Jele $\leftrightarrow$. Ennek segítségével a legnagyobb közös osztó meghatározását az alábbi folyamatábra írja le a Feltételek: $(a; b) = (b; a)$,

$$a > b, \quad (a; b) = (a - b; b).$$



Több hasonló jellegű feladat jól előkészíti a computer bevezetését.

DR. URBÁN JÁNOS
osztályvezető
Országos Pedagógiai Intézet, Budapest

A gimnáziumi matematikatanítás korrekciójának tervéről

Az 1979-ben bevezetett gimnáziumi matematika-tanterv nem jelentett gyökeresen újat a gimnáziumi matematikaoktatás tartalmában. Ugyanakkor alapvetően változtak a matematikatanítás szervezeti keretei. A tagozatos osztályok megszűnésével és a fakultáció bevezetésével III. és IV. osztályra tolódott át a tehetséges, érdeklődő tanulókkal való intenzívebb foglalkozás lehetősége. Kétségtelen előnyt jelent az, hogy így kisebb csoportokkal lehet foglalkozni, de nehéz behozni az I. és II. osztályban elveszített időt.

Módszertani szempontból igen kedvező lehetőséget teremtett az, hogy a gimnáziumi matematikatanárok két, eltérő módszertani elveket követő tankönyvsorozat közül választhattak. Feltétlenül igaz, hogy ez megnövelte a módszertani szabadságot és — ha vitákat kavart is — egyértelműen előrelépést jelentett. A következő időszakban indokoltnak látszik ennek a módszertani szabadságnak további növelése.

A korrekciót befolyásoló tényezők

A gimnáziumi matematikaoktatás korrekcióját a következő fontosabb okok motiválják:

— az 1979-ben bevezetett óratervek megváltoztak;
— az általános iskolai új matematikatanterv 1978-as teljes bevezetését követően 1986-tól kezdve minden gimnáziumba lépő tanuló már új matematikát tanult;
— a számítástechnika gyors fejlődésével párhuzamosan a gimnáziumokban már a tanulók rendelkezésére állnak zsebszámológépek, és megjelentek a személyi számítógépek is.

A következőkben röviden áttekintjük az előbb felsorolt tényezők hatását és a tervezett változtatásokat.

Az ötnapos tanítási hétre való áttéréssel létrejött ciklusos óratervben az egyes osztályok matematika-óraszámai keveset változtak a tantervhez képest. Az 1985—86-os tanévtől életbe lépett, alternatív módon választható hetes óratervben viszont már jelentősebb a változás (második osztályban több, mint 15%-kal csökkent az évi névleges összóraszám). Ezek a változások szükségessé tesznek bizonyos tananyag-átcsoportosításokat.

Az általános iskolai új matematikatanterv fokozatos felfutása az elmúlt években már éreztette hatását a gimnáziumi matematikaoktatásban. Az a kép alakult ki, hogy ennek során nagyon megnőtt a tanulók matematikatudásának szóródása. A legjobbak sok mindent tudnak már, ugyanakkor a gyengébbek ismereteiben nagy hiányok is vannak. Ennek ellenére megállapíthatók bizonyos közös tapasztalatok. A gimnáziumi első osztályos tantervi anyagban található ponthalmazok, számhalmazok, valamint a függvények témakör majdnem teljes egészében ismétlést jelent a tanulók számára. Ugyancsak bőséges intuitív tapasztalattal jönnek a tanulók az egybevágóság témaköréből is. Másrészt a biztos számolási készség, az algebrai ismeretek és a geometriai alapismeretek alkalmazása terén sok hiányosságot tapasztalunk.

Az általános iskolai matematika-tanterv korrekciója is most folyik. Ennek fő célja a követelmények pontosabb körülhatárolása, a törzsanyag csökkentése és ezzel több gyakorlási idő biztosítása. A tanterv korrekciójával párhuzamosan folyik az általános iskolai matematikatankönyvek és munkalapok átdolgozása.

Azok a változások tehát, amelyek az általános iskolai új matematika-tanterv felfutásával szükségessé válnak a gimnáziumban is, egyelőre kismértékűek, és jelentősebb hatásra csak a 80-as évek végén, a korrekció felfutásával számolhatunk. Jelenleg azt várhatjuk, hogy csökken az első osztályos tananyag zsúfoltsága, több idő jut a felzárkóztatásra, a gimnáziumi szilárdabb alapozásra.

Ismeretes, hogy e tanévtől az írásbeli érettségi és felvételi vizsgákon lehetőség van a zsebszámológépek használatára. A matematikatanárok nagy részének több éves követelése teljesült ezzel. Nyilvánvaló, hogy ez vissza fog hatni a matematika tanítására is. Például nem lesz szükség a táblázattal való számolás gyakorlására (természetesen a táblázatok használatának alapelveivel meg kell ismerkedniük a tanulóknak).

A személyi számítógépek megjelenése a gimnáziumokban szintén olyan tényező, amely hosszabb távon befolyásolja a matematika tanítását is. Nemcsak arról van szó, hogy a számítástechnikai alapműveltséget alkotó — ma még nem egy-

értelműen definiált — ismeretek részben a matematika-tárgyhoz is kapcsolódnak. Azt is jelenti a személyi számítógépek „tanulóközelbe" jutása, hogy például az analízis vagy a valószínűségszámítás, statisztika elemi alapfogalmainak szemléltetése, tapasztalati megalapozása kézenfekvővé válik. Algoritmusok alkotása, algoritmusok jóságának, gazdaságosságának megítélése, igazi, nem „álgyakorlati" feladatok megoldása sokkal nagyobb szerepet kaphat és kell is, hogy kapjon a matematika tananyagban. Mivel a belátható jövőben nem tervezik külön számítástechnika (informatika) tárgy bevezetését a gimnáziumokban, a programozás elemeinek tanítása — ahol erre a megfelelő feltételek adva vannak — szintén eszköze lehet a matematikatanítás eredményesebbé tételének. Ezek az elgondolások azonban már a távolabbi fejlesztés témakörébe tartoznak.

A korrekció tartalma

Mindezek alapján a következő tantervi átrendezéseket, módosításokat javasoljuk. Az első osztályos tantervi témák közül a „Ponthalmazok" témakörre körülbelül 10 órát érdemes szánni, a „Számhalmazok, aritmetika" témakörre szánt 15 órában célszerű elkezdeni a zsebszámológéppel való számolás gyakorlását. A „Függvények" témakörre körülbelül 10 órát javasolunk tervezni. Az „Algebra" témakörre változatlanul körülbelül 40—45 órát jó tervezni, hiszen erről a területről bizonytalan és kevés előismeretre számíthatunk. A geometria témaköröre így együtt körülbelül 40—45 óra jut. Ezek közül az első, „A geometria alapfogalmai" ismétlés jellegű fejezet elhagyható, de a második osztályos „Pont körüli elforgatás" és „Az egybevágóság fogalma" témaköröket első osztályba javasoljuk áthozni.

A második osztályos alaptantervi tananyag — az előzőleg javasolt változtatással — kevésbé zsúfolt lesz, valamivel több idő jut gyakorlásra. A harmadik osztályos tananyagból a „Számítástechnikai alapfogalmak" című fejezetet kiegészítő anyagnak lehet tekinteni. Természetesen kimaradhat a logaritmustáblázat és a 10-es alapú hatványtáblázat gyakorlása (csak a táblázat szerkezetének megismertetése a cél), helyette a zsebszámológép használatát érdemes gyakorolni.

A fakultatív tantervekkel kapcsolatos javaslatokra később térünk vissza részletesen. Alapelvként itt azt érdemes hangsúlyozni, hogy az alaptanterv tananyagán túl annyit és olyan mélységben érdemes elvégezni, amennyit a csoport összetétele eredményesen lehetővé tesz. Ebben az értelemben a szaktanár, az egyes munkaközösségek önállóan dönthetnek. Másképp, a tantervi kategóriák felhasználásával ezt úgy is kifejezhetjük, hogy az alaptanterven és az analízis alapfogalmain túlmenő tananyagrészek kiegészítő anyagként kezelhetők.

A dokumentumok korrekciójáról

Még 1986-ban vagy 1987 elején megjelenik a Függvénytáblázatok átdolgozott, javított kiadása. Készül és várhatóan 1987-ben megjelenik a „Matematikai feladatgyűjtemény" lényegesen átdolgozott, az új középiskolai tantervek anyagához igazított változata.

1988 nyarára jelenik meg a két, ma is használt párhuzamos tankönyv átdolgozott, javított kiadása. Ekkor tudják a tankönyvek is figyelembe venni azokat a tananyagátrendezési javaslatokat, amelyekről az előzőkben volt szó.

1988 nyarán jelenik meg egy új, szintén választható első osztályos matematikatankönyv. Szerzője Dr. Hajnal Imre szakfelügyelő. Ennek függelékeként olyan tanulói segédanyagot tervezünk, amely alkalmas arra, hogy a matematikatananyaghoz kapcsolva elemi programozási ismereteket sajátítsanak el a tanulók az iskolaszámítógépeken. A függelék szerzője Némethy Katalin szakfelügyelő. A függelék alkalmazását csak azokon a helyeken ajánljuk, ahol adottak a kellő feltételek.

Az 1988-at követő években jelennek meg az alaptantervhez készült tankönyvek javított, korrigált változatai. Érdemes még felhívni a figyelmet arra, hogy a speciális matematikai osztályok számára 1985-től folyamatosan jelennek meg olyan, tematikailag egységes tankönyvek, amelyek más gimnáziumokban jól használhatók szakköri füzetként. 1985-ben jelent meg Simonovits Miklós: Számítástechnika és Fried Ervin: Algebra című tankönyve. 1986 őszén várható a megjelenése a Lineáris algebra, Valószínűségszámítás, Analízis című köteteknek.

A korrekció további részleteiről, így az új dokumentumokról is általában „A Matematika Tanítása" című folyóirat egyes köteteinek 3. számában található majd részletes tájékoztatás.

ZORGEL FERENC
főiskolai adjunktus
Comenius Tanítóképző Főiskola, Sárospatak

Két megjegyzés az I. osztályos gimnáziumi anyag tanításához

A matematika belső harmóniáját — többek között — azzal is érzékeltethetjük, ha a különböző összefüggéseket más-más módon, az ismeretek szintjének megfelelően közelítjük meg.

1. A nevezetes azonosságoknál
$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$ összefüggést alkalmazva az $a=q$, $b=1$ esetre:
$q^n-1=(q-1)(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1)$.
Innét könnyen kapjuk, hogy az $1+q+\ldots+q^{n-1}$ összeg $q\neq 1$ esetén $\frac{q^n-1}{q-1}$.
Az $a+aq+\ldots+aq^{n-1}$ összeg pedig az előbbi formula, illetve kiemelés alkalmazásával a mértani sorozat első „n" elemének összegét adja.

2. A háromszög beírt körének tárgyalásakor fölvetődik az érintési pont és a csúcs távolsága.
Ismert, hogy a távolságokra az
$x=\frac{-a+b+c}{2}$, $y=\frac{a-b+c}{2}$ és $z=\frac{a+b-c}{2}$ összefüggést kapjuk.
Itt az az oldalhossz negatív, amely nem tartalmazza a szereplő ismeretlent. Másrészt a háromszög területe (ha a beírt kör sugara r):

$$t=\frac{a+b+c}{2}r.$$

A c átfogójú derékszögű háromszögben

$$r=\frac{a+b-c}{2} \quad \text{és} \quad t=\frac{ab}{2}.$$

Ezért

$$\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}=\frac{ab}{2}.$$

Az egyenlőség rendezés és nevezetes azonosság alkalmazása után az I. osztályos számára meglepő
$a^2+b^2=c^2$ összefüggésbe megy át.

DR. RÉDLING ELEMÉR
Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola Számítógéptechnikai Intézete
Székesfehérvár

A hasonlósági transzformáció definícióiról

Bevezetés

A hasonlósági transzformációra (hasonlóságra) a középiskolai tankönyvekben és a tanításhoz felhasználható szakkönyvekben különböző definíciók találhatók. (Lásd pl. az [1], az [5], a [6] és a [10] alatt említett munkákat!)

Fontosnak tartjuk, hogy a középiskolai tanárok ismerjék e definíciók kapcsolatát. Különösen lényeges ez akkor, ha *ugyanaz* a szaktanár *különböző* tankönyvekből is tanít, így pl. a gimnáziumi és a szakközépiskolai tankönyvekből.

Ebben a cikkben a hasonlóság két definíciójának kapcsolatát vizsgáljuk.

Csak a *tér*, illetve a *sík önmagára való* hasonlósági leképezéseivel foglalkozunk, s nem gondolunk pl. egy síknak egy másik síkra való leképezéseire.

Néhány elnevezés

Mivel a szakirodalomban a transzformációk kapcsán a szóhasználat nem teljesen egységes, ezért közöljük néhány elnevezésnek e cikkben használt változatát.

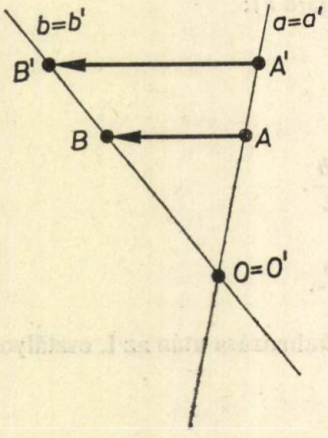
A fixelemek (fixpont stb.) definícióját pl. a [9]-ben találjuk meg (16. oldal). Ezek közül itt csak a *középpont* definícióját adjuk meg.

A középpont (centrum) olyan fixpont, amelyen áthaladó minden egyenes fix.

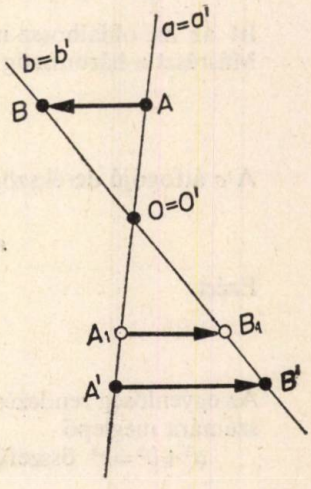
A középpontos hasonlóság a sík, illetve a tér olyan hasonlósága, amelynek van középpontja (centruma). (E transzformáció speciális esete a sík és a tér *azonos leképezése*, illetve *középpontos tükrözése*.)

Speciális esetben az O centrum egyetlen pontot sem választ el a képétől (lásd az 1. ábrát!). Ezt a transzformációt — a geometriai optika szóhasználatának megfelelően — **nagyításnak** nevezzük. (Ebbe az ún. kicsinyítést és az azonos leképezést is beleértjük. Az [1]-ben és az [5]-ben a „nagyítás" helyett a „középpontos hasonlóság" elnevezés szerepel.)

A középpontos hasonlóság másik esete *közös* középpontú tükrözés és nagyítás szorzata (2. ábra).



1. ábra



2. ábra

A középiskolai tanítás szempontjából lényegében véve a következő két definíció viszonyát fontos megvizsgálni. (E definíciók a *tér*, illetve a *sík* hasonlóságaira egyaránt vonatkoznak. A hasonlóság arányát k jelöli, ahol $k>0$.)

D_1: *A hasonlóság olyan transzformáció, ahol bármely AB szakaszra és A'B' képére* $A'B'=k\cdot AB$.

Az egybevágóság $k=1$ arányú hasonlóság.

D_2: *Egy nagyítás és egy egybevágósági transzformáció egymásutánját hasonlósági transzformációnak nevezzük.*

Itt a nagyítást és az egybevágóságot is hasonlóságnak tekintjük.

Megmutatjuk, hogy a D_1 és a D_2 *ekvivalensek*, vagyis azt, hogy az egyikből következik a másik, és megfordítva.

A [3]-ban a 115. oldalon megtalálhatjuk annak igazolását, hogy *létezik* tetszőleges k arányú hasonlóság. Ez ugyanis nem magától értetődő.

1. Tekintsük először a D_2 definíciónak megfelelő transzformációkat!

A k arányú nagyítás (a tankönyvekben: középpontos hasonlóság) ismert tulajdonsága, hogy bármely AB szakaszra és $A'B'$ képére $A'B'=k\cdot AB$. Ebből s az egybevágóság definíciójából már következik, hogy a D_2 szerinti hasonlóság a D_1 értelmében is hasonlóság, röviden: a D_1 a D_2 következménye.

2. Induljunk ki most a D_1 definícióból! Megmutatjuk, hogy a D_2 viszont a D_1 következménye.

A továbbiakban csak a sík hasonlóságaival foglalkozunk. A tér hasonlóságait ugyanis ugyanígy lehet tárgyalni.

Bevezetjük a következő szimbólumokat. Az **A** és **B** transzformációk kompozícióját (szorzatát) $\mathbf{A}\circ\mathbf{B}$, az **A** inverzét $\mathbf{A}^*$, a sík azonos leképezését pedig **I** jelöli.

A síkot önmagára leképező hasonlóságok halmaza a kompozíció műveletére nézve *csoportot* alkot, amelyet a *sík hasonlóságcsoportjának* nevezünk. (Ugyanis teljesül a zártság, érvényes az asszociativitás, létezik egységelem: a sík azonos leképezése, s a halmaz bármely elemének van a halmazban inverze.)

Legyen a **H** a síknak egy — a D_1 szerinti —, k arányú tetszőleges hasonlósága! Megmutatjuk, hogy a **H** *megkapható* (a síkon) *egy nagyítás és egy egybevágóság szorzataként is.*

Legyen az **N** egy O centrumú nagyítás a síkon, amelynek aránya szintén k. (Ilyen nagyítás létezik, s ezt az O centrum és a k arány egyértelműen meghatározza.) Jelölje $\mathbf{N}^*$ az **N** inverzét! Az $\mathbf{N}^*$ is nagyítás, ennek centruma szintén az O pont, aránya pedig $\frac{1}{k}$.

A **H** és az **N** ismeretében a sík hasonlóságcsoportját tekintve a

$$\mathbf{H}=\mathbf{N}\circ\mathbf{X} \tag{1}$$

egyenlet *mindig megoldható*, s a megoldás *egyértelmű*. Ha ugyanis létezik az (1)-nek megfelelő **X** hasonlóság, akkor szorozzuk be az $\mathbf{N}^*$-gal az egyenlet mindkét oldalát balról:

$$\mathbf{N}^*\circ\mathbf{H}=\mathbf{N}^*\circ(\mathbf{N}\circ\mathbf{X}).$$

A szorzás asszociatív tulajdonságát felhasználva az egyenlőség jobb oldala átírható:

$$\mathbf{N}^*\circ\mathbf{H}=(\mathbf{N}^*\circ\mathbf{N})\circ\mathbf{X}=\mathbf{I}\circ\mathbf{X}=\mathbf{X}.$$

Ellenőrizhető, hogy az

$$X = N^* \circ H$$

valóban *megoldása* az (1) egyenletnek. Az is látható, hogy — adott **N** nagyítást tekintve — ez *egyértelmű* megoldás, továbbá az is, hogy az **X** *egybevágóság*, hiszen aránya: $\frac{1}{k} \cdot k = 1$.

Beláttuk, hogy a sík $\mathbf{D}_1$ tulajdonságú transzformációi egyúttal a $\mathbf{D}_2$ szerint is hasonlóságok.

Ugyanezt mondhatjuk a tér hasonlóságairól is.

Eredményeink összegzéseként azt kapjuk, hogy a $\mathbf{D}_1$ és a $\mathbf{D}_2$ ekvivalens definíciók.

3. Érdemes meggondolni a következőket. Az előzőkben az **N** nagyítás centrumát *tetszőlegesen* választhattuk meg. Más-más centrumot választva más-más nagyításhoz jutunk. (Ezek aránya azonban ugyanaz a k szám, ez éppen a **H** aránya.) Ebből pedig már látható, hogy a **H** *végtelen sokféleképpen* adható meg egy nagyítás és egy egybevágóság kompozíciójaként.

Az előzőkkel analóg módon mutatható meg, hogy a sík hasonlóságai körében a

$$H = Y \circ N$$

egyenlet is *egyértelműen oldható meg*, és itt az **Y** szintén *egybevágóság*.

A **H** tehát felfogható *egy egybevágóság és egy nagyítás kompozíciójaként is.*

A sík (illetve a tér) **E** egybevágósága és **N** nagyítása esetén általában

$$E \circ N \neq N \circ E.$$

(Ennek indoklására könnyű példát találni.) A kompozíció művelete a hasonlóságok körében *nem kommutatív.*

4. Érdemes megvizsgálni az elmondottak *logikai* hátterét is. A definíciónak az a funkciója, hogy a fogalmat egyértelműen elhatárolja más fogalmaktól. Amikor fogalmat alkotunk, akkor a fogalomhoz tartozó objektumokból halmazt képezünk. Ezt a halmazt a fogalom *terjedelmének* nevezzük. A fogalomhoz tartozó objektumok ennek a halmaznak az elemei. A definíció szerepe éppen az, hogy egyértelműen adja meg ezt a halmazt; vagyis pontosan jelezze, hogy mely elemek tartoznak ebbe a halmazba, s melyek nem. A $\mathbf{D}_1$ és a $\mathbf{D}_2$ definíciókkal egy-egy fogalmat alkotunk. E fogalmak *terjedelmüket tekintve egyenlők, tartalmukat nézve azonban különbözők,* mert *más-más tulajdonságot* helyeznek előtérbe. Az ilyen fogalmakat *ekvivalens fogalmaknak* nevezzük, a fogalmakat megadó definíciókat pedig *ekvivalens definícióknak* mondjuk. (Lásd még a [7]-ben az 51—58. oldalon leírtakat!)

Logikai szempontból a fogalom definiálására az ekvivalens definíciók bármelyike választható. *Didaktikai* szempontok határozzák meg azt, hogy az ekvivalens definíciók közül melyiket tanítjuk.

IRODALOM

[1] CZAPÁRY E.: *Matematika II.* (Szakközépiskolai tankönyv.) Tankönyvkiadó, 1980.
[2] GYAPJAS F.: *Csoportelmélet.* (Középiskolai szakköri füzetek.) Tankönyvkiadó, 1974.
[3] HAJÓS GY.: *Bevezetés a geometriába.* Tankönyvkiadó, 1972.
[4] HORVAY K.—PÁLMAY L.: *Matematika a gimnázium és szakközépiskolák II. osztálya számára.* Tankönyvkiadó, 1974.
[5] DR. KORÁNYI E.: *Matematika II. osztály.* (Gimnáziumi tankönyv.) Tankönyvkiadó, 1980.

[6] MAYERNÉ DR. BARTAL ANDREA—PÁLFALVI JÓZSEFNÉ: *Matematika munkatankönyv II.* Tankönyvkiadó, 1980.
[7] RÉDLING E.: *Az egybevágósági transzformációk rendszerezése. A logika néhány eleme.* Tolna megyei Pedagógus Továbbképzési Intézet, 1978.
[8] RÉDLING E.: *A sík és a tér hasonlósági transzformációi.* ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei XIV. (1981.)
[9] RÉDLING E.: *Geometriai transzformációk.* Tankönyvkiadó, 1980.
[10] RÉDLING E.: *Hasonlósági transzformációk.* Tankönyvkiadó, 1982.

SCHUSTER GYULA
vezető tanár
Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár

Igaz-e?

1. Az 1983/84-es tanév egyik óraközi szünetében, egy gimnáziumban az egyik matematikatanár (ekkor éppen K tanár) — a munkaközösségben egyébként is szokásos módon — felhívta a jelenlévők figyelmét az „Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából" című, 1980-as (kék) kiadvány **152.** (vagyis az 1984-es „zöld" kiadvány **208.**) feladatára. Érdekelné, mondta, hogy milyen választ adnak kollégái a feladat kérdésére? A feladat szövege a következőképp hangzik: „Tudjuk, hogy a, b, c és d olyan valós számok, amelyekre $\{ab; a+b\}=\{cd; c+d\}$. *Igaz-e, hogy* $\{a; b\}=\{c; d\}$?"

2. Aznap éppen L tanárnak volt kedve ahhoz, hogy a 15 perces szünet alatt, „becsengetésig" megoldja a feladatot, amiben nyilván valamilyen érdekesség rejlik. El is olvasta a feladatot — sajnos, kissé kapkodva —, és miközben leírta az adott egyenleteket papírjára, már át is fogalmazta a feladatot. *Az eredeti „amennyiben igaz „A" állítás, igaz-e „B" állítás*?" alakú kérdés *helyett* arra kezdte keresni a választ, hogy *„valahányszor igaz „A" állítás, mindannyiszor igaz-e „B" állítás is — vagyis következik-e „A" állításból a „B" állítás*?" Nem sejtette, hogy K tanár éppen az átfogalmazással való óvatosabb bánásmódra kívánta felhívni a figyelmet!

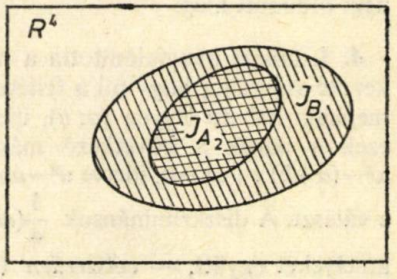
Ha két gyakorlott matematikatanár kétféle választ képes adni ugyanannak a feladatnak a kérdésére, akkor feltehető, hogy a tanulók is hasonlóképpen gondolkodnak, és ez mindenképp gondolkodóba kell, hogy ejtsen tanárt és feladatszerzőt egyaránt!

A két — halmazokkal megfogalmazott egyenlet (logikai függvény) — által megadott állítások mindegyike két-két egyenletrendszerrel (állítások konjunkciója) felírható részállítások diszjunkciójának tekinthető. A már kezdetben elkövetett hiba ellenére — az önmagukban is érdekes „melléktermékek" kedvéért — L tanár gondolatmenetét követve, az a kérdés, hogy $A=A_1 \vee A_2$ állítás $J_A \subset R^4$ igazsághalmazának minden $(a; b; c; d)$ elemére mindig teljesül-e $B=B_1 \vee B_2$ állítás, vagyis igaz-e az $A \Rightarrow B$ implikáció?

$$A_1: \begin{cases} ab = cd \\ \text{és} \\ a+b = c+d \end{cases} \qquad B_1: \begin{cases} a = c \\ \text{és} \\ b = d \end{cases}$$

vagy *vagy*

$$A_2: \begin{cases} ab = c+d \\ \text{és} \\ a+b = cd \end{cases} \qquad B_2: \begin{cases} a = d \\ \text{és} \\ b = c \end{cases}$$



Az A_1 részállítás ekvivalens B állítással, hiszen a d kiejtésével A_1 egyenletrendszerből nyerhető $(a-c)\cdot(b-c)=0$ egyenlet ezt világosan mutatja.

Az A_2 részállítás teljesülésének feltételei azonban már nem láthatók ilyen könnyen, és ezért az sem, hogy B állítás mindig igaz-e, ha A_2 igaz? *Tekintve, hogy ellenpéldát sem sikerült L tanárnak gyorsan találnia, ezért másképp kísérelte meg kimutatni, hogy léteznek „ellenpéldák"*. Az A_2 egyenletrendszer megoldása helyett így gondolkodott: ha B állítás mindig igaz volna, valahányszor A_2 állítás igaz, akkor az $A_2 \Rightarrow B$ implikáció folytán, igazsághalmazaikra $J_{A_2} \subset J_B$ kellene, hogy teljesüljön. Ez viszont ekvivalens azzal, hogy $J_{A_2} \cap J_B = J_{A_2}$. Az egyenletrendszerekkel való foglalkozás közben (például a koordináta-geometriában) mindenki megtanulja, hogy két egyenlet „lineáris kombinációjaként" előállítható harmadik egyenlet igazsághalmaza mindig részhalmazként tartalmazza az eredeti egyenletek igazsághalmazainak metszetét, hiszen az ún. egyenlő együtthatók módszere is ezen alapul. Az A_2 és B egyenletrendszerekből éppen ilyen módon nyerhető C *állítás*: $ab=a+b$, igazsághalmaza (J_c) tehát részhalmazként kellene, hogy tartalmazza $J_{A_2} \cap J_B = J_{A_2}$ halmazt. Az viszont akár „egyszerű ránézésre" is világos, hogy az A_2 egyenletrendszernek nemcsak akkor van megoldása, ha ugyanaz a szám található mindkét egyenletének a bal oldalán (hisz $ab=a+b$ ezt jelenti). Következésképp J_{A_2} *nem részhalmaza* J_C *igazsághalmaznak,* **tehát „léteznek" ellenpéldák.**

Ezután, még „becsengetés előtt" L tanár megmutatta és elmondta vázlatosan leírt elgondolását K tanárnak, mondván, hogy *szerinte a feladat kérdésére „határozott nem" a válasz.* K tanár azt válaszolta, hogy ezt a választ nem fogadja el jó megoldásnak, majd pedig sietve „órájukra mentek".

3. Az óra megtartása után L tanár ebédelni ment M kollégájával és menetközben elmondta neki, hogy — amennyiben a nagy sietségben más hibát nem követett el — olyan $(a; b; c; d)$ számnégyest kellene találnia K tanár meggyőzésére, amelyre A_2 állítás teljesül, de C állítás nem, tehát $ab=a+b$ nem áll fenn.

Ezalatt (mintegy ebéd utáni szórakozásként) „N" és „O" tanár megbeszélték a szünetben „félfüllel" észlelt, K és L tanár közti vitát. Valószínűleg az L tanár szerint „kulcsszerepet" játszó $ab=a+b$ egyenlettel foglalkozhattak elsősorban, mert az ebédről visszatérő L tanárt azzal fogadták, hogy a nagy sietségben ott követhette el a hibát, amikor esetleg csak az $ab=a+b$ egyenlet olyan $(a; b)$ megoldáspárjaira gondolt, amelyeknek mindegyik eleme egész szám.

Ez persze „mellékvágány" volt, hisz világos ugyan, hogy $ab=a+b$ vagyis $a \neq 1$ esetén is $b=1+\frac{1}{a-1}$ egyenlet megoldáspárjai egy teljes hiperbola pontjaival ábrázolhatók — $(a; b)$ tengelyű koordináta-rendszerben — viszont az eredeti feladat éppen olyan $(a; b)$ illetve $(c; d)$ rendezett párok megtalálását kívánná, amelyekre $ab=c+d$ és $a+b=cd$ egyszerre teljesül, de $ab \neq a+b$! L tanár problémája tehát nem oldódott meg.

4. L tanárt nyugtalanította a megoldatlan feladat, ezért még aznap délután azt kezdte vizsgálni, hogy mi a feltétele annak, hogy adott $(ab; a+b)$ rendezett párhoz meghatározható legyen $(a; b)$, illetve az A_2 egyenletrendszerből $(c; d)$ pár? Mivel ezek a párok a következő másodfokú egyenletek gyökpárjainak tekinthetők: $x^2-(a+b)x+ab=0$, illetve $u^2-ab\cdot u+(a+b)=0$, ezért a diszkriminánsok adják meg a választ. A diszkriminánsok $\frac{1}{4}(ab)^2 \geqq a+b$ és $\frac{1}{4}(a+b)^2 \geqq ab$ feltételeket adják, amelyeket együtt, — *célszerűen* $(ab; a+b)$ *tengelyű koordináta-rendszerben* — két

parabola által határolt, két síkrész metszeteként könnyen ábrázolhatunk ponthalmazzal.

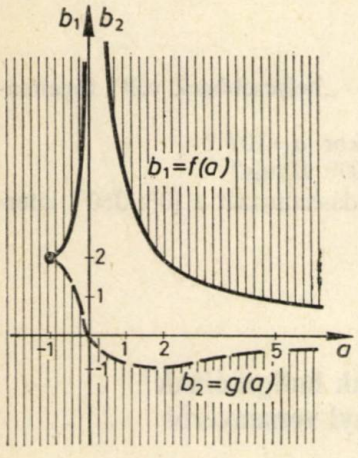
Ezután a rajzról megbízhatóan leolvasható rengeteg $(ab; a+b)$ párból kiindulva nem nehéz akárhány $(a; b)$, illetve $(c; d)$ „ellenpélda"-párt készíteni. Ilyen például az $(5; 6)$ párból kiindulva nyerhető $a=5$, $b=1$, $c=3$, $d=2$, amit természetesen egy tehetséges tanuló a fenti gondolatmenet nélkül is megtalálhat, — ettől azonban nem változik az előző gondolatmenet önmagában is érdekes részleteket tartalmazó mivolta.

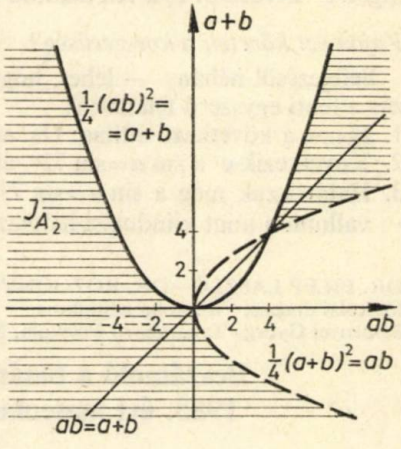
Szakkörön vagy esetleg fakultációs csoportban, talán éppen a most kiderített megoldhatósági feltételek vizsgálata, $(ab; a+b)$ koordináta-rendszer helyett közvetlenül $(a; b)$ rendszerben való ábrázolásra törekedve, *motiválhatja néhány, nem is túl egyszerű, függvény vizsgálatát*!

$$D_f = D_g = \{a \in R \mid a \geqq -1 \text{ és } a \neq 0\}$$

értelmezési tartományú

$$f(a) = \frac{2+2\sqrt{a^3+1}}{a^2} = b_1 \quad \text{és} \quad g(a) = \frac{2-2\sqrt{a^3+1}}{a^2} = b_2.$$





5. Másnap, a tanítás megkezdése előtt L tanár közölte, hogy most már akárhány „ellenpéldával" is tud szolgálni az „igaz-e" kérdés tagadásához. K tanár viszont továbbra is ragaszkodott ahhoz, hogy a helyes válasz — az ellenpéldákkal együtt is — nem lehet más, mint hogy van olyan eset, amikor a feladat állítása igaz, de van olyan eset is, amikor nem igaz. Végül P tanár megszánta L tanárt és közbeszólt, hogy felesleges vitáznia K tanárral, hiszen csak a feladat kérdését nem vette pontosan szó szerint. Ezzel a vita le is zárult, hiszen a feladat eredeti kérdésére valóban K tanár válasza a helyes, bár L tanár is jól oldotta meg ugyanazt a feladatot.

6. Utólagos meditációk és újabb kérdések.

a) A matematikán belül általában olyan állítások igazságát szokták vizsgálni, amelyek szerkezete „Ha *„A"* igaz, akkor *„B"* is igaz". **Önmagában olyan kérdésnek, hogy „igaz-e *B* állítás" nincs sok értelme, a matematika természetszerűleg axomatikus felépítése folytán.** Ilyen jellegű kérdések eldöntése — mondjuk a tér Euklidesz- vagy Bolyai-féle szerkezetére, általában a fizikai valóságra vonatkozóan

— más tudományok, például a fizika feladata. Ezért fordulnak elő a fentebb említett szerkezetű kérdések a leggyakrabban; esetleg olyan formában is, hogy „Következik-e az „*A*" állításból a „*B*" állítás?"

b) **Függvényekkel** (speciális logikai függvényekkel: egyenletekkel) **kapcsolatban elsősorban azt szokták kérdezni a matematikában,** hogy az „*A*" **állítást kielégítő elemek halmazán** — mint kiindulási halmazon — **mi az igazsághalmaza** „*B*" — **állításnak (logikai függvénynek)?"** Vegyük észre, hogy arra a kérdésre „ha *A* igaz, akkor igaz-e *B*" szinte gondolkodás nélkül, mindig „rávághatjuk", hogy: néha igaz—néha nem", hisz ez a válaszunk nagy valószínűséggel mindig helyes lesz, Ha viszont indoklást is kívánunk a kérdésre, akkor az „igazsághalmaz" meghatározására való felszólítás helyesebb, mint az „igaz-e" kérdés.

c) A legújabb „Tanári kézikönyvet" lapozgatva szintén találhatunk ugyanolyan szerkezetű kérdést és — ami lényeges — választ is, mégpedig az előzőkben részletesen ismertetett, vitás feladatnál egyszerűbb és ezért áttekinthetőbb formában. Például a 231. oldal 30/2a. feladata:

Kérdés: $\sin a = \sin 73°$. Igaz-e, hogy $a = 107°$?

Válasz: Lehet, hogy $a = 107°$, de lehet, hogy nem.

Ezek után érdekes volna, ha mások is kifejtenék véleményüket a fenti mintára feltett „igaz-e" kérdésről és a reá adandó válaszról!

Vajon ezt követeli a korszerűség?

Befejezésül néhány — lehet, hogy csak általam — „helyesebbnek vélt" fogalmazás a fenti egyszerű feladatra:

1. Igaz-e a következő állítás: Ha $\sin a = \sin 73°$, akkor $a = 107°$?
2. Következik-e a $\sin a = \sin 73°$ állításból az $a = 107°$ állítás?
3. Határozzuk meg a $\sin a = \sin 73°$ egyenlet megoldáshalmazát a $[0°; 360°]$ intervallumon mint kiindulási halmazon!

DR. FILEP LÁSZLÓ—DR. ROZGONYI TIBOR
főiskolai docens, főiskolai adjunktus
Bessenyei György Tanárképző Főiskola, Nyíregyháza

Beszámoló a tanárképző főiskolák hallgatóinak 1985. évi matematikai tanulmányi versenyéről

A versenyt április 22-én és 23-án a Nyíregyházi Bessenyei György Tanárképző Főiskolán rendezték, amelyen a Berzsenyi Dániel TKF (Szombathely), az ELTE Tanárképző Kar (Budapest), a Ho Si Minh TKF (Eger), a JPTE Tanárképző Kar (Pécs), a Juhász Gyula TKF (Szeged) és a Bessenyei György TKF öt-öt hallgatója vett részt.

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnökségének felkérése alapján a versenybizottság

elnöke: Hódi Endre osztályvezető (OPI);
titkára: Dr. Rozgonyi Tibor főiskolai tanársegéd (Nyíregyháza);
tagjai: Dr. Filep László főiskolai docens (Nyíregyháza);
Fried Katalin egyetemi tanársegéd (ELTE);
Kamarás Lajos egyetemi adjunktus (JPTE);
Sebestyén József főiskolai adjunktus (Szombathely);
Dr. Szepessy Bálint főiskolai docens (Eger);
Dr. Szilassi Lajos főiskolai docens (Szeged) voltak.

A kitűzött feladatok megoldására —az első nap délelőttjén — 5 óra állt a versenyzők rendelkezésére.

Délután Nyíregyháza nevezetességeivel ismerkedtek a versenyzők.

A második napon került sor a megoldások ismertetésére és az ünnepélyes eredményhirdetésre.

A versenybizottság egyhangúlag a következő határozatot hozta:

I. díjat nyert
Fritz Péter, Szombathely;

II. díjat nyert
Henczi Béla, Pécs;
Kiss Zoltán, Pécs;
Garai Zsuzsa, Nyíregyháza;
Elblinger Ferenc, Pécs;

III. díjat nyert
Kincses László, Pécs;
Németh Gyula, Szombathely;
Janek Gábor, Budapest.

Dicséretben részesült
Szabados Éva, Budapest;
Baski Ferenc, Budapest;
Fehér Andrea, Eger;
Horváth János, Szeged;
Zsuponics László, Szombathely;
Csontos Alajos, Szeged;
Sütheő Cecilia, Szombathely;
Virágh Judit, Eger;
Huszár Endre, Budapest.

A Bolyai János Matematikai Társulat

800 Ft-os különdíját nyerte
Fritz Péter, Szombathely;

600 Ft-os különdíját
Kiss Zoltán, Pécs;

300 Ft-os különdíját
Elblinger Ferenc, Pécs;
Zsuponics László, Szombathely.

A kitűzött feladatok és megoldásuk

1. feladat

Egy osztályba 25 tanuló jár. Közülük 17 tud kerékpározni, 13 úszni és 8 síelni. Egyik tanuló sem űzi mindhárom sportot, de a kerékpározók, az úszók és a síelők egyaránt vagy jók, vagy közepesek matematikából, ugyanakkor az osztály 6 tanulója közepesnél gyengébben tanulja a matematikát.
Hány jeles tanuló van matematikából az osztályban? Hány úszó tud síelni?

Megoldás:

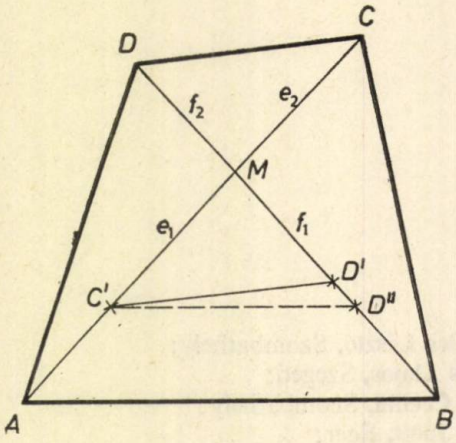
A sportolók száma nyilván legalább 17 és legfeljebb 19 (ugyanis 6 tanuló biztosan nem sportoló). A kerékpározni tudó úszók és síelők együttes száma nem lehet több 17-nél, hiszen a három halmaz közös része üres. Ha 17 sportoló van, akkor ez a szám 21, míg ha 18 sportoló van, akkor ez a szám legalább 19. Tehát 19 sportolónak kell lenni, amiből 11 úszó és 6 síelő kerékpározik, kettő pedig nem kerékpározik, de úszik és síel. Tehát két úszó tud síelni, matematikából pedig nincs jeles az osztályban.

2. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex négyszöget az átlói négy, egyenlő kerületű háromszögre bontanak, akkor az a konvex négyszög rombusz!

Megoldás:

A feladat feltételének teljesüléséhez szükséges az, hogy a négyszög paralelogramma legyen. Ha ugyanis a négyszög nem paralelogramma, akkor átlóinak M metszéspontja legalább az egyik átlónak nem felezőpontja.



Az ábra jelöléseit használva feltehetjük, hogy

$$e_1 > e_2, \quad f_1 \geqq f_2.$$

Tükrözzük az MCD háromszöget az M pontra! Megmutatjuk, hogy

$$K_{MCD} = K_{MC'D'} < K_{MAB},$$

ahol K a megfelelő háromszögek kerületét jelöli. Ez az alábbi egyenlőtlenségekből következik:

$$C'M < AM, \quad D'M \leqq BM, \quad C'D' < AB.$$

Az első két egyenlőtlenség teljesülése nyilvánvaló. A harmadik belátásához húzzunk párhuzamost AB oldallal C' ponton keresztül! A kapott $C'D''$ szakasz hossza a középpontos hasonlóság miatt kisebb AB oldal hosszánál.

Ha D'' pont egybeesik D' ponttal, akkor $C'D' = C'D''$, különben $C'D' < C'D''$, mert a $C'D''D'$ háromszögben az utóbbi a nagyobbik szöggel szemközti oldal.

Ha viszont egy paralelogrammára teljesül a feltétel, akkor ez csak rombusz (speciálisan négyzet) lehet. Jelölje a paralelogramma oldalait a és b, átlóit e és f. Ekkor a feladat szerint teljesülni kell, hogy

$$\frac{e}{2}+\frac{f}{2}+a = \frac{e}{2}+\frac{f}{2}+b.$$

Innen pedig $a=b$ következik. Rombuszra valóban be is látható a feladat állítása.

3. feladat

Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyek egy (tetszés szerint adott) háromszög belsejéhez tartoznak, és a háromszög három oldalától mért távolságuk összege egyenlő a háromszög magasságvonalainak számtani közepével?

Megoldás:

A háromszög S súlypontja hozzátartozik a keresett mértani helyhez, mert az oldalaktól való távolságai rendre a megfelelő magasságok harmadai.

A többi pont megkereséséhez tekintsük a következő oldalon levő ábrát!

Az $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ és $\mathbf{g}$ az S pontból induló, és a magasságvonalakkal egyállású egységvektorok, P a keresett mértani hely egy pontja, és $\mathbf{p}=\overrightarrow{SP}$. Jelölje a magasságok számtani közepét m. Ekkor teljesülni kell az alábbiaknak:

$$d_1+d_2+d_3 = m, \quad h_1+h_2+h_3 = m,$$

amelyekből

$$(d_1-h_1)+(d_2-h_2)+(d_3-h_2) = 0$$

következik. Viszont

$$d_1-h_1 = \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}, \quad d_2-h_2 = \mathbf{p}\cdot\mathbf{f}, \quad d_3-h_3 = \mathbf{p}\cdot\mathbf{g},$$

mert például

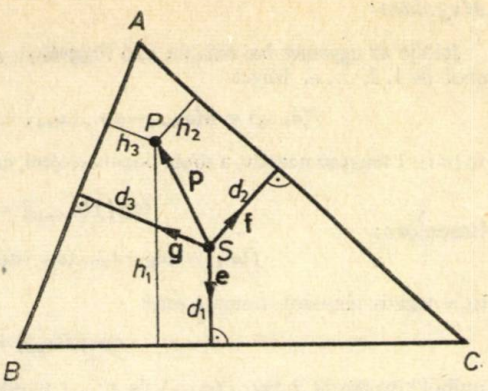
$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{g} = |\mathbf{p}|\cdot|\mathbf{g}|\cdot\cos(\mathbf{p},\mathbf{g}) = |\mathbf{p}|\cdot\cos(\mathbf{p},\mathbf{g}).$$

Kapjuk tehát, hogy

$$\mathbf{p}\cdot(\mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g}) = 0,$$

ami azt jelenti, hogy $\overrightarrow{SP}$ merőleges $\overrightarrow{SG}$-ra, ahol G az $\mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g}$ vektor végpontját jelöli.

A keresett mértani hely tehát az $\overline{SG}$-ra S pontban merőleges egyenesnek a háromszög belsejébe eső szakasza. Ha $S=G$, vagyis a háromszög szabályos, akkor a háromszög minden belső pontja hozzátartozik a mértani helyhez.



4. feladat

Jelentsenek a, b és n pozitív egész számokat, p pedig (pozitív) páratlan prímszámot!
Legyen továbbá

$$F(n) = 1+2n+3n^2+\ldots+(p-1)n^{p-2}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $a \not\equiv b \pmod p$, akkor $F(a) \not\equiv F(b) \pmod p$.

Megoldás:

Szorozzuk meg $F(n)$-t n-nel, majd vonjunk ki belőle $F(n)$-t:

$$(n-1)F(n) = (p-1)n^{p-1}-(1+n+n^2+\ldots+n^{p-2}) =$$

$$= p\cdot n^{p-1}-(1+n+n^2+\ldots+n^{p-1}) = p\cdot n^{p-1}-\frac{n^p-1}{n-1} \quad (n\not\equiv 1).$$

Ha p nem osztója n-nek és $n\not\equiv 1 \pmod p$, akkor Fermat kongruencia-tételével

$$(n-1)F(n) = p\cdot n^{p-1}-\frac{n^p-1}{n-1} \equiv -\frac{n-1}{n-1} = -1 \pmod p.$$

Ha p osztója n-nek, akkor

$$(n-1)F(n) \equiv -(1+n+\ldots+n^{p-1}) \equiv -1 \pmod p.$$

Végül, ha $n\equiv 1 \pmod p$, akkor

$$F(n) \equiv 1+2+\ldots+p-1 = \frac{p(p-1)}{2} \equiv 0 \pmod p.$$

Tehát, ha a és b egyike sem kongruens 1-gyel modulo p, akkor

$$(a-1)\cdot F(a) \equiv (b-1)\cdot F(b) \equiv -1 \pmod p,$$

ahonnan egyrészt $F(a)\not\equiv 0$, $F(b)\not\equiv 0 \pmod p$, másrészt $F(a)\not\equiv F(b) \pmod p$ következik. Ellenkező esetben ugyanis $a\equiv b \pmod p$ adódna, ami ellentmond feltételünknek.
Ha a és b valamelyike— mondjuk a — kongruens 1-gyel, a másik nem, akkor mint fentebb láttuk:

$$F(a) \equiv 0 \pmod p, \qquad F(b) \not\equiv 0 \pmod p,$$

vagyis ez esetben is $F(a)\not\equiv F(b)$ modulo p, ami bizonyítandó volt.

5. feladat

Jelentsenek $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}$ olyan valós számokat, amelyekre fennáll, hogy

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_{2n-1} > a_{2n};$$

legyen továbbá b tetszés szerinti pozitív szám! Bizonyítsuk be, hogy az

$$(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{2n-1})+b(x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_{2n}) = 0$$

egyenletnek csupa, egymástól különböző valós gyöke van!

Megoldás:

Jelölje az egyenlet bal oldalán álló függvényt $f(x)$. Vizsgáljuk meg $f(a_{2i-1})$ és $f(a_{2i})$ előjelét, ahol $i=1, 2, \ldots, n$. Mivel

$$f(a_{2i-1}) = b(a_{2i-1}-a_2)\ldots(a_{2i-1}-a_{2i-2})\cdot(a_{2i-1}-a_{2i})\ldots(a_{2i-1}-a_{2n}),$$

és itt $i-1$ tényező negatív, a többi pozitív előjelű, ezért

$$\operatorname{sgn}[f(a_{2i-1})] = \operatorname{sgn}(-1)^{i-1}.$$

Hasonlóan:

$$f(a_{2i}) = (a_{2i}-a_1)\ldots(a_{2i}-a_{2i-1})(a_{2i}-a_{2i+1})\ldots(a_{2i}-a_{n-1}).$$

Itt a negatív tényezők száma i, ezért

$$\operatorname{sgn}[f(a_{2i})] = \operatorname{sgn}(-1)^i,$$

amiből következik, hogy $f(a_{2i-1})$ és $f(a_{2i})$ minden i esetében ellenkező előjelű.

Az $f(x)$ folytonos az egész valós számegyenesen, ezért a folytonos függvények ismert tulajdonsága szerint az $f(x)=0$ egyenletnek legalább egy zérushelye esik a_{2i-1} és a_{2i} közé minden i esetén. Ez legalább n darab különböző valós gyök létezését jelenti.

Azonban az $f(x)$ fokszáma n, tehát az algebra alaptétele szerint több gyöke nem is lehet az $f(x)=0$ egyenletnek. Ezzel megmutattuk, hogy az egyenlet gyökhalmaza csak különböző valós számokból áll.

6. feladat

Az (a_n) sorozat elemeit következőképpen definiáljuk:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0; \quad a_{n+1} = \frac{a_{n-1}+na_n}{n+1}, \quad \text{ha} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Konvergens-e az (a_n) sorozat?
Ha igen, akkor mi a határértéke?

Megoldás:

Rendezzük át a rekurziós formulát:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}} = -\frac{1}{n+1}.$$

Írjuk fel ezt az összefüggést 1-től n-ig, és szorozzuk össze az egyenlőségek megfelelő oldalait! Ekkor kapjuk, hogy

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1-a_0} = (-1)^n\frac{1}{(n+1)!},$$

azaz

$$a_{n+1}-a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}.$$

Ez utóbbi összefüggést írjuk fel minden n-re nullától kezdődően n-ig, majd adjuk össze az egyenlőségek megfelelő oldalait! Így az alábbi formulához jutunk:

$$a_{n+1} = a_0+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\frac{1}{k!},$$

amely a_n-re átírva így alakul:

$$a_n = 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}.$$

Ez a sorozat pedig, mint ismeretes, konvergens és határértéke $\frac{1}{e}$.

7. feladat

Legyenek f és g olyan, minden valós x-re értelmezett valós függvények, amelyekre teljesül, hogy

$$f(x-y) = f(x)\cdot g(y) - g(x)\cdot f(y),$$
$$g(x-y) = g(x)\cdot g(y) - f(x)\cdot f(y).$$

Fejezzük ki $g(3x)$-et $g(x)$ függvényeként!

Megoldás:

Először megmutatjuk, hogy $f(x)$ páratlan és $g(x)$ páros. Ezek az alábbi egyenlőségekből következnek:

$$f(x) = f(2x-x) = f(2x)\cdot g(x) - g(2x)\cdot f(x),$$
$$f(-x) = f(x-2x) = f(x)\cdot g(2x) - g(x)\cdot f(2x),$$
$$g(x) = g(2x-x) = g(2x)\cdot g(x) - f(2x)\cdot f(x),$$
$$g(-x) = g(x-2x) = g(x)\cdot g(2x) - f(x)\cdot f(2x).$$

Az $f(x)$ páratlan voltából $f(0)=0$ következik. Ennek felhasználásával kapjuk, hogy

$$g(0) = g(0-0) = g^2(0),$$

ahonnan $g(0)=0$ vagy $g(0)=1$ adódik:

Ha $g(0)=0$, akkor

$$f(x) = f(x-0) = f(x)\cdot g(0) - g(x)\cdot f(0) = 0,$$
$$g(x) = g(x-0) = g(x)\cdot g(0) - f(x)\cdot f(0) = 0.$$

vagyis $f(x)$ és $g(x)$ azonosan nulla. Ekkor tehát

$$g(3x) = g(x) = 0.$$

Ha $g(0)=1$, akkor

$$1 = g(0) = g(x-x) = g^2(x) - f^2(x),$$

valamint

$$f(2x) = f(x)\cdot g(-x) - g(x)\cdot f(-x) = 2f(x)\cdot g(x),$$
$$g(2x) = g(x)\cdot g(-x) - f(x)\cdot f(-x) = g^2(x) + f^2(x),$$

Ezeknek az összefüggéseknek a felhasználásával kapjuk, hogy

$$g(3x) = g(2x+x) = g(2x)\cdot g(-x) - f(2x)\cdot f(-x) = [g^2(x)+f^2(x)]\cdot g(x) + 2f^2(x)\cdot g(x) =$$
$$= [2g^2(x)-1]\cdot g(x) + 2g(x)\cdot[g^2(x)-1] = 4g^3(x) - 3g(x).$$

A felírt függvényegyenleteknek az $f(x)=\operatorname{sh} x$ és a $g(x)=\operatorname{ch} x$ függvények eleget tesznek.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor utca 10., II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! (Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is!) A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1131. Az ABC háromszög A csúcsánál levő szögének felezője AD (D a BC oldalon van). Az ABD háromszög beírt körének középpontja azonos az ABC háromszög köré írt körének középpontjával. Mekkorák az ABC háromszög szögei?

1132. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan természetes szám van, amelynek köbe nem állítható elő három természetes szám négyzetének összegeként!

Varga István, Nagyszalonta

1133. Az $A_1A_2A_3A_4$ és a $B_1B_2B_3B_4$ konvex négyszögek úgy helyezkednek el egy síkban, hogy az A_3, A_4, B_1 és B_2 csúcsok kollineárisak, továbbá az A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 és A_4B_4 szakaszok párhuzamosak. Igazoljuk, hogy ha a két négyszögben az átlók M_1 illetve M_2 metszéspontjára illeszkedő egyenes párhuzamos az A_iB_i egyenesekkel, akkor az A_1A_2, A_3A_4, B_1B_2 és B_3B_4 egyenesek egy sugársorhoz tartoznak!

Számadó László, Szeged

1134. Legyenek (a_n) és (x_n) pozitív, egynél nem nagyobb tagú valós számsorozatok, amelyekre

$$x_1 = x \quad \text{és} \quad x_n = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_2x^2 + \frac{x}{n-1}$$

bármely $n>1$ pozitív egészre. Határozzuk meg az x értékét, ha $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$!

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

1135. Két gömb mindegyike a másik külsejében van. Tekintsük a két gömb közös külső, illetve belső érintőkúpját. Igazoljuk, hogy a két gömb közös belső érintősíkja a külső érintőkúpból olyan ellipszist metsz ki, amelynek fókuszainak távolsága egyenlő egy közös külső érintősík és a belső érintőkúp által adódó metszethiperbola csúcsainak távolságával!

Győrffy László, Miskolc

1136. Bizonyítsuk be, hogy bármely $k\geqq 3$ egészhez megadható a síkon k darab pont úgy, hogy bármely háromszög, amelynek csúcsai a k pontból valók, tompaszögű!

Róka Sándor, Nyíregyháza

Feladatmegoldások (1107—1112.)

1107. Felírható-e 1985 két egész szám négyzetének összegeként?

Varga István, Nagyszalonta

I. megoldás: Ha a válasz igenlő, akkor a két egész mindegyike 45-nél kisebb, mivel $45^2=2025$. Az 1985 hárommal való osztási maradéka 2, ezért a két egész egyike sem lehet a 3 többszöröse, mert a hárommal nem oszthatók négyzete (3-mal osztva) 1 maradékú. A négyzetszámok utolsó jegye 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9 lehet, így ilyenek összege 85-re csak akkor végződhet, ha az utolsó jegyeken az 1+4 vagy a 6+9 összegezést végezzük el (a 0+5 kiesik vizsgálódásunk köréből, hiszen a 0-ra, illetve 5-re végződő négyzetszámok 00-ra, illetve 25-re végződnek).

Ha a két egész egyike egyjegyű, akkor a másik — $1985-81=1904>43^2$ miatt — csakis a 44 lehet. De $1985-44^2=1985-1936=49=7^2$, így a $(\pm 7)^2+(\pm 44)^2=1985$, a kívánt tulajdonságú felbontás.

A 10 és 20 közötti számokhoz $39^2<1985-400<1985-100<44^2$ miatt csak a 39 és 43 közöttiek jöhetnek szóba. A 39, 40 és 42 korábbi megfontolásainak alapján kiesnek, a megmaradó 41 és 43 számok négyzetét 1985-ből levonva, a maradék nem négyzetszám.

A 20 és 30 közötti számokhoz a 33 és 40 közöttiek társulhatnak, és ezek közül, megszorításaink miatt, csak a 34, 37 és 38 jöhetnének szóba, de ezek négyzetének és az 1985-nek a különbsége nem négyzetszám.

A még fennmaradt 31, 32 és 33 számok közül az utóbbi 3-mal osztható, a 31 és 32 pedig a kívánt felbontáshoz vezet, hiszen $31^2+32^2=1985$. Ezzel beláttuk, hogy az 1985 két lényegesen különböző

nódon állítható elő két négyzetszám összegeként:

$$7^2+44^2 = 31^2+32^2 = 1985.$$

Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest

II. megoldás: Ha meg akarjuk adni az összes (pozitív egész) megoldást, meg kell oldanunk az $x^2+y^2=1985$ egyenletet. x és y paritása különböző, legyen $x=2k$, $y=2t+1$ alakú. Ekkor $(2k)^2+(2t+1)^2=1985$-ből $k^2+t(t+1)=496$ adódik, s mivel $t(t+1)$ páros, k is páros kell legyen, vagyis x a 4-nek többszöröse.

Mivel $44^2<1985<45^2$, x lehetséges értékei: 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44. Ezek közül csak az $x=32$ és az $x=44$ felel meg, ezért 1985 két (pozitív) egész szám négyzeteként csak a következő két módon bontható fel: $32^2+31^2=1985$ és $44^2+7^2=1985$.

Csorba Ferenc, Győr

III. megoldás: Az 1985 két prím szorzatára bomlik: $1985=5\cdot 397$. Az 5 és a 397 $4k+1$ alakú prímek, így egyértelműen bomlanak fel két-két Gauss-prím szorzatára, amelyek egymás konjugáltjai:

$$5 = (2+i)\cdot(2-i); \quad 397 = (19+6i)\cdot(19-6i).$$

A négy Gauss-prím szorzatát kétféleképpen tudjuk úgy két tényezőre bontani, hogy azok egymás konjugáltjai legyenek és így szorzatuk két négyzetszám összegét adja:

$$(2+i)(19+6i) = 32+31i \quad \text{és} \quad (2-i)(19-6i) = 32-31i$$

vagy

$$(2-i)(19+6i) = 44-7i \quad \text{és} \quad (2+i)(19-6i) = 44+7i.$$

Az első esetben kapjuk, hogy $1985=32^2+31^2$, míg a másodikban $1985=44^2+7^2$.

Kiss Géza, Kisújszállás

Megjegyzések: (1) Pontosan azok a természetes számok bonthatók fel két négyzetszám összegére, amelyek prímfelbontásában a $4k-1$ alakú prímek páros hatványon szerepelnek és az $x^2+y^2=n$ megoldásainak száma: $4|d_1(n)-d_2(n)|$, ahol $d_1(n)$ illetve $d_2(n)$ az n $4k+1$ illetve $4k-1$ alakú osztóinak számát jelöli.

Bigus Imre, Sárospatak

(2) A $4k-1$ alakú prímek a Gauss-egészek körében is prímek. A 2 felbomlik $(1+i)(1-i)$-re, a $4k+1$ alakú prímek a fentiek szerint két Gauss-prím szorzatára.

(3) Csak abban az esetben lesz egy megoldás, ha a két négyzetszám összegére bontandó szám, $4k+1$ alakú prímszám.

Kiss Géza, Kisújszállás

(4) A feladat megoldásának egy BASIC nyelvű programja:

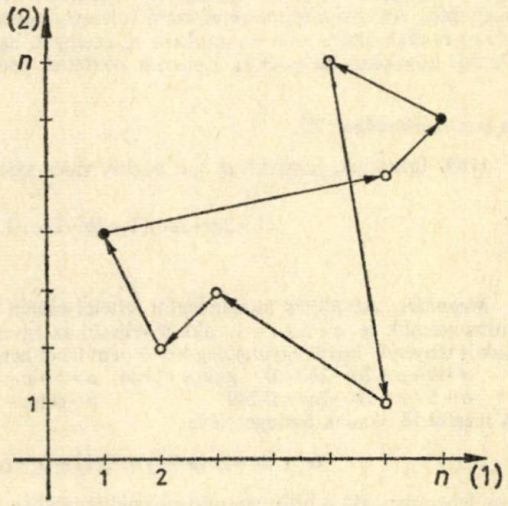
```
10 REM FELADAT
20 FOR I=1 TO INT
   (SQR (1985/2)+1)
30 A=SQR (1985 — I*I)
40 IF A=INT (A) THEN PRINT I, A
50 NEXT I
60 END
```

Bagi Barnabás, Barcs

A megoldók száma: 36.

1108. Tekintsük az első n pozitív egész egy tetszőleges permutációját! Bizonyítsuk be, hogy e permutációban a szomszédosak különbsége abszolútértékeinek összege (az első és utolsó elem különbségét is véve) nem kevesebb, mint $2n$—2!

I. megoldás: Jelölje $k_1, k_2, \ldots, k_n$ az $1, 2, \ldots, n$ elemek egy tetszőleges per-



1. ábra

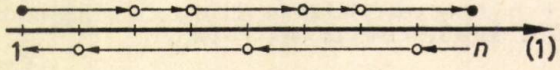
mutációját, és tekintsük az n számú

$$(k_1, 1),\quad (k_2, 2), \ldots, (k_n, n)$$

rácspontot.

Ha összekötjük a $(k_1; 1), (k_2; 2), \ldots, (k_n; n), (k_1; 1)$ pontokat egy-egy szakasszal, akkor irányított zárt töröttvonalhoz jutunk. (1. ábra.)

A töröttvonalban levő szakaszok (1) tengelyre eső vetületének hossza a permutációbani szomszédos elemek különbségének abszolútértéke, a töröttvonal (1)-re eső vetülete pedig a szomszédos elemek különbsége abszolútértékének összege.



2. ábra

Induljunk el abból a pontból, amelynek első koordinátája 1, abba a pontba, amelynek első koordinátája n, majd ebből vissza az előbbi pontba, a töröttvonalon, a nyíl irányában. A megtett útnak az (1) tengelyre eső vetülete mindkét esetben legalább $n-1$, együtt tehát legalább $2(n-1)$, amit igazolni kellett.

Csorba Ferenc, Győr
Kamarás Lajos, Pécs
Zalán Péterné, Budapest

II. megoldás: Teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. $n=2$ esetén az összeg: $1+1=2=2\cdot 2-2$, tehát igaz az állítás. Tegyük fel, hogy n ($\geqq 2$) elem esetén a feladatbeli S_n összeg legalább $2n-2$. Azt kell belátnunk, hogy $n+1$ elem esetén az összeg legalább $2(n+1)-2=2n$. Mivel az $n+1$ elem bármely permutációja az n elem egy permutációjából úgy is származtatható, hogy az utóbbiban a megfelelő két szám (k és m) közé az $n+1$ számot írjuk (az első n szám permutációját egy körvonal mentén helyezzük el). Feltehető, hogy $k<m$. Így S_n $(m-k)$-val csökken, viszont $n+1-k+n+1-m$-mel nő. Mivel $n-m\geqq 0$ és $n-k\geqq m-k$, ezért

$$n+1-k+n+1-m = n-k+2+n-m \geqq m-k+2,$$

tehát S_{n+1} legalább 2-vel több, mint S_n és ezt kellett igazolnunk.

Bagi Gábor, Barcs
Hajna János, Pécs

Megjegyzés: Az első megoldásból azonnal kitűnik, hogy a feladatbeli összeg pontosan akkor minimális, ha a zárt töröttvonal (1) — tengelyre eső vetületének a hossza $2(n-1)$, vagyis a vetület az $(1; n)$ intervallum minden pontját kétszeresen fedi. Ez pontosan azt jelenti, hogy az irányított zárt töröttvonal szakaszainak a vetületeit is egymáshoz csatlakozó módon irányítva, az $(1; n)$ intervallum minden rácspontja egy-egy ilyen (egyező irányú), egész hosszúságú vektor kezdő, illetve végpontja. Az első n természetes szám valamely permutációja (és ennek ciklikus permutációi) tehát akkor és csak akkor adja a minimális S_n összeget, ha e permutációban az 1 és az n elemek közötti elemek növekedő, az n- és az 1 elemek közöttiek pedig csökkenő sorozatot adnak.

Zalán Péterné, Budapest

A megoldók száma: 23.

1109. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív valós számok $\frac{1}{2}$-nél kisebbek és $a+b+c=1$, akkor

$$(1-2a-2bc)(1-2b-2ac)(1-2c-2ab) \leqq a^2b^2c^2.$$

Merényi Imre, Kolozsvár

Megoldás: Az állítás általánosabb feltétel esetén is igaz! Azt fogjuk igazolni, hogy ha a, b, c valós számok és $a+b+c=1$, akkor teljesül az egyenlőtlenség. Először megmutatjuk, hogy a baloldali tényezők közül egyidejűleg kettő nem lehet negatív. Ha ugyanis az

$a+b+c-2a-2bc<0$, akkor ebből $a>b+c-2bc$ és az
$a+b+c-2b-2ac<0$-ból $b>a+c-2ac$ következne.

A megfelelő oldalak összegét véve:

$$0 > 2c-2c(a+b) = 2c(1-(a+b)) = 2c(1-(1-c)) = 2c^2,$$

ami lehetetlen. Ha a bizonyítandó egyenlőtlenségben a baloldali tényezők közül pontosan egy negatív, az állítás triviálisan teljesül. Végül, ha tényezőink nem negatívok, a számtani és mértani középre

vonatkozó egyenlőtlenség és feltételünk alapján:

$$(1-2a-2bc)(1-2b-2ac) \leqq \left(\frac{2-2(a+b)-2c(a+b)}{2}\right)^2 = c^4,$$

$$(1-2a-2bc)(1-2c-2ab) \leqq \left(\frac{2-2(a+c)-2b(a+c)}{2}\right)^2 = b^4,$$

$$(1-2b-2ac)(1-2c-2ab) \leqq \left(\frac{2-2(b+c)-2a(b+c)}{2}\right)^2 = a^4.$$

Itt a megfelelő oldalak szorzatának négyzetgyökét véve, a bizonyítandó állítás előáll. Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a fenti három egyenlőtlenségben mindenütt az egyenlőség áll, azaz ha

$$1-2a-2bc = 1-2b-2ac = 1-2c-2ab.$$

Ezekből

$$0 = 2a-2b+2bc-2ac = 2(a-b)(1-c) = 2(a-b)(a+b) = 2(a^2-b^2)$$

és hasonlóan

$$0 = 2(b^2-c^2)$$

adódik, tehát a feladatbeli relációban az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $|a|=|b|=|c|$ és $a+b+c=1$, vagyis $a=b=c=\frac{1}{3}$, vagy a, b, c közül az egyik -1, a másik kettő pedig 1.

Boda Miklós, Pécs,

A megoldók száma: 18.

1110. Melyek azok a periodikus számsorozatok, amelyek első hat eleme rendre 1, 7, 9, 4, 4, 9 és a peródus hossza 9?

Cseh László, Kolozsvár

Megoldás: Végtelen sok olyan periodikus (a_n) számsorozat van, amely a feladat feltételeinek megfelel. Legyen ugyanis minden $k \geqq 0$ egészre

$$a_{9k+1} = 1, \quad a_{9k+2} = 7, \quad a_{9k+3} = a_{9k+6} = 9, \quad a_{9k+4} = a_{9k+5} = 4$$

és

$$a_{9k+7} = \alpha, \quad a_{9k+8} = \beta, \quad a_{9k+9} = \gamma,$$

ahol α, β, γ tetszőlegesen választott valós szám.

Barta László, Nógrádmegyer

Megjegyzések: (1) Meglepő, hogy a könnyű feladatra milyen kevés megoldás érkezett. A feladatban nem egy a pozitív egész számokon értelmezett, periodikus függvényt kellett megadni, hiszen az értékkészlet (képhalmaz) és a $9k+7$, $9k+8$ és $9k+9$ elemek képeinek az ismerete nélkül egyértelmű választ nem lehet adni! Ennélfogva mind az értékkészlet (képhalmaz), mind a hiányzó hozzárendelés megadásában szabad kezünk van.

(2) Ha $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ egész együtthatós polinomfüggvény, akkor $f(x+9) \equiv f(x) \pmod 9$ minden x egészre, vagyis ha $f(x)$ helyettesítési értékeit tekintjük (mod 9) a természetes számok halmazán, akkor egy 9 periódusú sorozatot nyerünk. Ha az $f(x)$ helyettesítési értékei $x=1, 2, 3, 4, 5$ és 6-ra rendre $f(x) \equiv 1, 7, 9, 4, 4, 9 \pmod 9$, akkor a minden x, j természetes egészre érvényes $(x-3)^j+(x+3)^j \equiv 2x^j \pmod 9$ miatt bármely $f(x)$ egészegyütthatós polinomfüggvényre $f(x+3)+f(x-3) \equiv 2f(x) \pmod 9$ minden természetes x-re. Így

$$f(7) \equiv 2f(4)-f(1) \equiv 8-1 = 7 \pmod 9$$

$$f(8) \equiv 2f(5)-f(2) \equiv 8-7 = 1 \pmod 9$$

$$f(9) \equiv 2f(6)-f(3) \equiv 18-9 = 9 \pmod 9,$$

tehát a polinom helyettesítési értékeit (mod 9) tekintve a következő periodikus sorozatot kapjuk: 1, 7, 9, 4, 4, 9, 7, 1, 9, ...

Ha tekintjük az n^4 sorozat tagjait, és ezekből elkészítjük azt a sorozatot, amelynek tagjait az előbbi sorozatból úgy nyerjük, hogy az egyes tagok számjegyeit összeadjuk mindaddig, amíg egyjegyű számhoz nem jutunk, éppen az előbbi periodikus sorozatot kapjuk: $1^4=1$, $2^4=16$, $3^4=81$, $4^4=256$, $5^4=625$, $6^4=1206$ rendre az 1,7, 9, 4, 4, 9 számokhoz vezet.

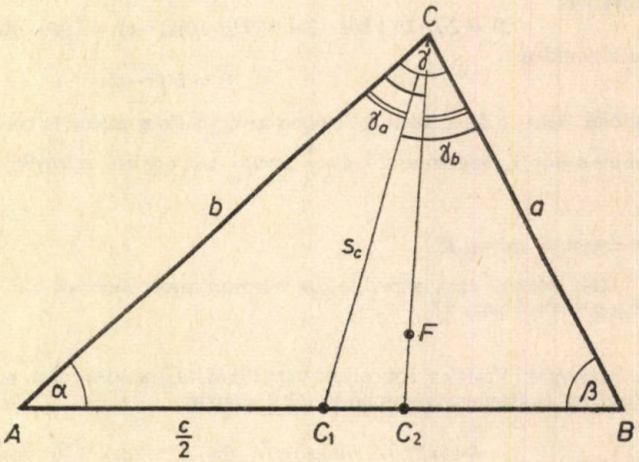
Fentiekkel egybevetve: minden $f(x)$ egészegyütthatós polinom, melynek helyettesítési értéke (mod 9) az első hat természetes számra rendre 1, 7, 9, 4, 4, 9, kongruens (mod 9) az x^4 polinomfüggvénnyel, minden pozitív egészre.

Cseh László, Kolozsvár

A megoldók száma: 9.

1111. Jelölje k_{ac} az ABC háromszög AB oldalát A-ban érintő és a C csúcson átmenő kört. Hasonlóan definiáljuk a $k_{ab}, k_{ba}, k_{bc}, k_{ca}$ és k_{cb} köröket. A k_{ba} és k_{bc}, k_{ba} és k_{bc}, illetve k_{ca} és k_{cb} körök másodszor rendre a D, E, F pontban metszik egymást. Mutassuk meg: az AD, BE, CF egyenesek egy ponton mennek át!

Péter Árpád, Sepsiszentgyörgy



4. ábra

Megoldás: Tekintsük az ABC háromszöghöz tartozó körök közül a k_{ca} és k_{cb} köröket. Ezek középpontját jelölje O_{ca} és O_{cb}. Jelölje továbbá f_a, illetve f_b az a, illetve b oldalak felezőmerőlegesét, metszéspontjuk legyen G (L. a. 3. ábrát a borítón!) A konstrukció alapján $CO_{ca}\,GO_{cb}$ négyszög paralellogramma, $O_{ca}\,O_{cb}$ átlója merőleges CF-re. $\gamma_a := BCF\sphericalangle = CO_{ca}\,O_{cb}\sphericalangle$ és $\gamma_b := ACF\sphericalangle = GO_{ca}\,O_{cb}\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek. A háromszög oldala, ezzel szemközti szöge és a köré írt kör sugara közötti összefüggés alapján:

$$CO_{ca} = \frac{b}{2\sin\gamma}, \quad CO_{cb} = \frac{a}{2\sin\gamma},$$

ezért $\dfrac{CO_{ca}}{CO_{cb}} = \dfrac{b}{a}$; következésképpen $CO_{ca}G\triangle \sim ABC\triangle$. A $CO_{ca}G\triangle$-ben az $O_{ca}O_{cb}$ egyenes súlyvonal; ezzel bebizonyítottuk a következőt: az $ABC\triangle$-ben a CF egyenes akkora szöget zár be a háromszög a, illetve b oldalával, mint a C pontból induló súlyvonal a b, illetve a oldallal. (4. ábra.)

A következőkben meghatározzuk: a CF egyenes milyen arányban metszi a szemközti oldalt. Írjuk fel a sinustételt előbb az ACC_1 és BCC_1 háromszögekben:

$$\frac{\sin C_1\sphericalangle}{\sin\gamma_a} = \frac{b}{\frac{c}{2}}, \quad \frac{\sin C_1\sphericalangle}{\sin\gamma_b} = \frac{a}{\frac{c}{2}},$$

majd az ACC_2 és BCC_2 háromszögekben:

$$\frac{\sin C_2\sphericalangle}{\sin\gamma_b} = \frac{b}{AC_2}, \quad \frac{\sin C_2\sphericalangle}{\sin\gamma_a} = \frac{a}{C_2B}.$$

Vegyük az első kettőnek, majd a másik kettőnek a hányadosát:

$$\frac{\sin\gamma_b}{\sin\gamma_a} = \frac{b}{a}, \quad \frac{\sin\gamma_a}{\sin\gamma_b} = \frac{b}{a}\cdot\frac{C_2B}{AC_2}.$$

Ezek összeszorzásával, majd átrendezésével kapjuk:

$$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Tekintsük ezután a következő három osztóviszony szorzatát:

$$(ABC_2)\cdot(BCA_2)\cdot(CAB_2) = \frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A} = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{a^2}{c_2} = 1,$$

itt A_2, illetve B_2 jelölte az AD, illetve BE egyeneseknek a BC ,illetve CA oldalakkal való metszéspontját.

Ceva tétele (lásd: Hajós György: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó), szerint az AA_2, BB_2, CC_2 egyenesek egy ponton mennek át.

Kamarás Lajos, Pécs,
Sándor József, Farcád

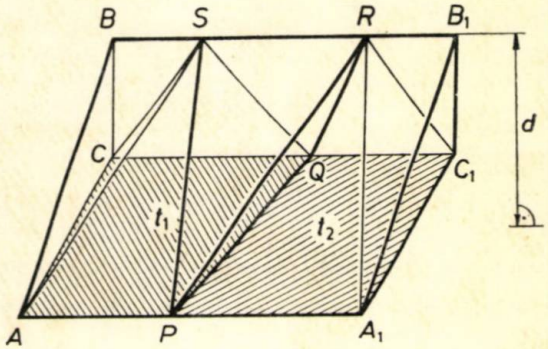
A megoldók száma: 10.

1112. Az $ABCD$ tetraéder csúcspontjai egy egységnyi térfogatú egyenes körhenger határoló lapjain helyezkednek el. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ tetraéder térfogata nem nagyobb $\frac{2}{3\pi}$-nél!

OKTV. 1985. év., 2. forduló.

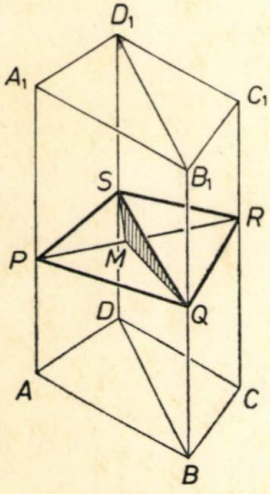
Megoldás: Két segédtételt bizonyítunk be:

1. Ha egy háromszögalapú egyenes hasábba úgy írunk tetraédert, hogy csúcsai a hasáb oldaléleire illeszkednek, akkor a tetraéder térfogata nem nagyobb, mint a hasáb térfogatának harmada. Az 5. ábra jelöléseivel: a $PQRS$ tetraéder térfogata nem nagyobb, mint az a szám, amelyet az $ABCA_1B_1C_1$ hasáb V térfogatából a $PQCAS$ és PQC_1A_1R gúlák térfogatának összegét levonva kapunk, azaz

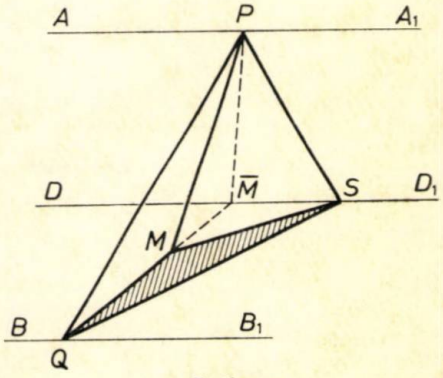


5. ábra

$$V_{PQRS} \geqq V - \frac{t_1+t_2}{3}d.$$



6. ábra



7. ábra

A hasáb V térfogata viszont $\frac{t_1+t_2}{2}d$, amint azt könnyen beláthatjuk, ha a hasábot — az ABB_1A_1 paralelogramma lapjának középpontjára tükrözve — paralelepipedonná egészítjük ki. Tehát

$$V_{PQRS} \leqq V - \frac{2}{3}V = \frac{1}{3}V.$$

2. Ha egy konvex négyszög alapú egyenes hasábba úgy írunk tetraédert, hogy csúcsai a hasáb (különböző) oldaléleire illeszkednek, akkor a tetraéder térfogata a hasáb V térfogatának legfeljebb $\frac{1}{3}$-a lehet.

Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ hasábot a BDD_1B_1 sík két, háromszögalapú egyenes hasábra bontja (6. ábra). E sík a beírt tetraéder PR élét az M pontban metszi. A $QSMP$ tetraéder térfogata — a (nem feltétlenül valódi) tartalmazás miatt — nem nagyobb a $QSMP$ tetraéder térfogatánál (7. ábra). Az 1. segédtétel alapján tehát

$$V_{PQRS} \leqq \frac{V_{ABDA_1B_1D_1}}{3} + \frac{V_{BCDB_1C_1D_1}}{3} = \frac{1}{3}V.$$

Most már rátérhetünk eredeti feladatunk bizonyítására:

Legyen az egységnyi térfogatú forgáshenger magassága m, alapkörének sugara r. Tekintsük azokat a hengeralkotókat, amelyek a beírt tetraéder csúcsaira illeszkednek. A beírt tetraéder térfogata segédtételeink értelmében nem nagyobb az így kapott hasáb térfogatának harmadánál.

Ha az így definiált hasábok között van maximális térfogatú, és ebbe írható harmadakkora térfogatú tetraéder, akkor ennek térfogata nem kisebb bármely más beírt tetraéder térfogatánál.

Mivel m és r rögzített, a maximális térfogatú hasáb megkeresése ekvivalens az adott r sugarú körbe írható maximális területű négyszög, illetve háromszög megkeresésével. E problémának ismert a megoldása: a négyzet, illetve a szabályos háromszög. Minthogy a beírt négyzet területe a nagyobb, ezért a maximális térfogatú hasáb négyzetes oszlop, ennek V térfogata pedig:

$$V = 2r^2m = \frac{2}{\pi}\pi r^2 m = \frac{2}{\pi}V_{henger} = \frac{2}{\pi}.$$

Ennélfogva bármely, a hengerbe írt tetraéder V_t térfogata nem nagyobb, mint $\frac{2}{3\pi}$ és az egyenlőség is lehetséges, például abban az esetben, ha a beírt tetraéder két kitérő éle a henger alap- illetve fedőlapjának egy-egy egymásra merőleges átmérője.

dr. Marosvári Péter, Budapest

A megoldók száma: 17.

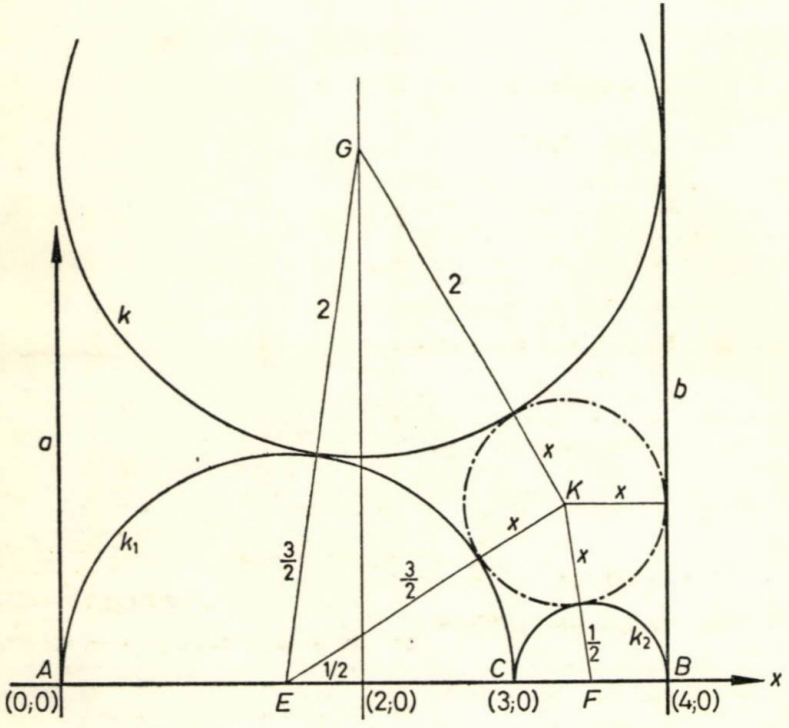
A megoldók névsora (1107—1112.)

Ambrus Gabriella, Budapest (1107—1109., 1111.); Bagi Barnabás, Barcs (1107); Bagi Gábor, Barcs (1107., 1108., 1110.); Barta László, Nógrádmegyer (1108—1112.); Bencze Mihály, Brassó (1107—1112.); Bigus Imre, Sárospatak (1107., 1111., 1112.); Boda Miklós, Pécs (1107—1109); Bódi Viktor, Nyitra (1107., 1112.); Cseh László, Kolozsvár (1107—1110); dr. Csorba Ferenc, Győr (1107—1109., 1112); Fazekas Jánosné, Szeghalom (1107., 1109.); Földeák Árpád, Budapest (1107.); Hajdú Ferenc, Nagykálló (1107., 1108.); Hajna János, Pécs (1107—1109.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest (1107.); Horváth Géza, Zselíz (1111.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1107—1110., 1112.); Jászberényi Péter, Nyitra (1107., 1112.); Kamarás Lajos, Pécs (1107—1112.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (1107.); Kiss Géza, Kisújszállás (1107. 2 mód, 1108., 1109.); Kovácsné Gajdács Ibolya, Budapest (1107., 1108., 1112.); Kun Péter, Szentendre (1107., 1108., 1112.); dr. Major Pál, Budapest (1107—1109., 1108., 1112.); dr. Marosvári Péter, Budapest (1107—1109., 1112.); Merényi Imre, Kolozsvár (1107—1110.); Mészáros József, Galánta (1107., 1111.); Nagy Ferenc, Brassó (1107.); Náfrádi Ferenc, Győr (1107., 1108.); Sándor József, Farcád (1107—1109., 1111., 1112.); Sebestyén László, Budapest (1107., 1109.); Szánthó Gyula, Gyula (1107., 1111., 1112.); Takács Dezső, Egyházaskozár (1107.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (1107., 1108. 2 mód, 1109. 2 mód, 1110., 1112.); Varga István, Nagyszalonta (1107. 2 mód., 1108., 1109.); Vincze István, Szeged (1107.); Wekszli Árpád, Csorna (1107., 1108., 1110., 1112.); Zalán Tiborné Budapest (1107., 1108., 1112.).

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

VERSEGHY KÖNYVTÁR SZOLNOK



1986. augusztus * XXXIII. évfolyam 4 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

86-2462 — Szegedi Nyomda — F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban; példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat (nyugdíjasok törzsszámukat is), *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését, *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

TARTALOM

A Művelődési Minisztérium pályázati felhívása 97
Fonódi Gyula: Az általános iskolai matematikatanítás helyzete, eredményei és problémái 99
Lénárt István: Axiomatizálás a gömbfelületen III. 109
Dr. Varga Tamás: Megjegyzések Fonódi Gyula cikkéhez 117
Kintli Lajos: A π meghatározása számítógéppel 121

FELADATOK 125

СОДЕРЖАНИЕ

Педагогический Конкурс Министерства просвещения и культуры ВНР 97
Фоноди Дюла: Положение, результаты и проблемы преподавания математики в начальной школе 99
Ленарт Иштван: Аксиоматизация на сфере III. 109
д-р Варга Тамаш: Заметки к статье Фоноди Дюлы 117
Кинтли Лайош: Установление величины π при помощи ЭВМ 121

ЗАДАЧИ 125

INHALT

Preisausschreibung des Kulturministeriums 97
Fonódi, Gyula: Die Situation, Ergebnisse und Probleme des Mathematikunterrichts in der Grundschule 99
Lénárt, István: Axiomatisierung auf der Kugelfläche III. 109
Dr. Varga, Tamás: Bemerkungen zum Aufsatz von Gyula Fonódi 117
Kintli, Lajos: Die Bestimmung der Zahl π durch einen Computer 121

AUFGABEN 125

A Művelődési Minisztérium pályázati felhívása

A Művelődési Minisztérium a Tanterv- és Tankönyvfejlesztés Országos Tanácsa (TTOT) javaslatára pályázatot hirdet. A pályázattal elő kívánjuk segíteni az iskolarendszerben folyó nevelés és oktatás tartalmának, tevékenységrendszerének és taneszközeinek a korszerűsítését, különös tekintettel az alábbi témákra:

— a tanulással kapcsolatos alapképességek differenciált fejlesztése (pl. kommunikációs képességek, megismerő képességek stb.);
— a hátrányos helyzetű tanulók felzárkóztatása, a lassan és hibásan tanulók korrekciója;
— a tehetséges tanulók speciális fejlesztése;
— a rokon tantárgyak integrációja és koncentrációja (a rokon tantárgyak közti horizontális és vertikális összefüggések feltárása);
— a tanórán és a tanórán kívüli iskolai szervezetekben folyó tantárgyi tanulás összefüggései;
— tantárgyi feladatrendszerek (nívó rendszerek);
— alternatív programok a kiegészítő tananyag és a fakultáció körében.

Pályázni lehet:

— egy-egy iskolatípus (iskolaszakasz) teljes tantervi koncepciójával;
— egy-egy műveltségi terület (vagy integrált tantárgy) teljes tantervi rendszerének leírásával, mely tartalmazza néhány tetszés szerint kiválasztott tantervi téma kidolgozását (tananyag, követelmények, módszertani ajánlások, tanulói és tanári segédletek);
— a jelenleg érvényben levő tantervek alapján végzett tanítás és tanulás tapasztalatainak, eredményeinek és problémáinak a kritikai elemzésével, mely javaslatot is tartalmaz a helyi körülmények figyelembevételére;
— a tankönyvek, tanítói és tanári kézikönyvek koncepciójával (néhány fejezet kidolgozása).

A pályázatok kapcsolják össze a téma elméleti és gyakorlati kérdéseinek a tárgyalását. Részletesebb elemzésre, a koncepció szemléltetésére az általános és középfokú iskolák bármelyik évfolyamát, tantárgyát, témakörét kiválaszthatják. Ha a pályázat új rendszert dolgoz ki, illetve ha a közoktatás mai adottságaitól gyökeresen eltérő feltételekkel számol, foglalkozzék a terv megvalósításának a lehetőségével, fokozataival is.

A pályázat feltételei

A pályázaton egy vagy több — korábbi, más országos pályázaton nem díjazott — pályamunka egyidejű beadásával részt vehet valamennyi hazai pedagógus, köznevelési szakember, akár egyénileg, akár csoportosan. Pályázatot iskolák és szakmai munkaközösségek is benyújthatnak. A pályamunkát zárt borítékban, jeligésen, minden év július 1-ig kell benyújtani 3 példányban a Művelődési Minisztérium Tanterv- és Tankönyvfejlesztés Országos Tanácsa címére (Budapest, Pf. 1. 1884).

A pályaművek elbírálásáról, a díjak odaítéléséről — előzetes szakértői vélemények és a Tanterv- és Tankönyvfejlesztés Országos Tanácsa állásfoglalása alapján — a következő év december 1-ig dönt a minisztérium.

Pályázati díjak:

5 db I. díj: 40 000—40 000,—Ft,
5 db II. díj: 25 000—25 000,—Ft,
5 db III. díj: 15 000—15 000,—Ft.

Az MM — a szakértői bizottságok, illetve a TTOT javaslatától függően — 2 db 100 000,—Ft-os különdíj kiadását is tervezi olyan pályázati munkák díjazására, amelyek az általános iskolai, a középfokú oktatásra érvényesen, tudományos igényességgel, a távlati fejlesztési célok irányába mutatóan egy-egy műveltségi blokk, illetve integrált tantárgy vertikálisan és horizontálisan rendszerezett tartalmát dolgozzák ki.

A pályázat meghirdetése évente konkrét témákra, tantárgyakra, iskolatípusra történik.

Pályázati témák 1987-re:

1. Bármelyik általános iskolai tantárgy több osztályt átfogó, összehangolt tervezése. (Kiemelten kezeljük a környezetismeret, a magyar nyelv és irodalom, a matematika, a fizika és technika tantárgyak pályázatait.)
2. Alternatívan választható tankönyvek (munkafüzetek, feladatlapok) kidolgozása. (Különösen az általános iskolai és gimnáziumi történelem és irodalom, matematika, fizika és a Kodály koncepció megvalósítását szolgáló ének-zene tankönyvek.)
3. Tanári útmutatók, kézikönyvek.
4. Új tantervi koncepció és taneszközrendszer kidolgozása. (Különösen az általános iskolai környezetismeret 1—5, testnevelés és ének-zene az 1—8. osztályban.)
5. Egyes műveltségi területek integrált tantervfejlesztése. (Ennek kijelöléséhez felhasználhatók a Műveltségkép az ezredfordulón c. munkában megjelölt műveltségi területek.)

A pályázattal kapcsolatban további információk beszerezhetők személyesen a TTOT titkárától (Bp. V., Szalay u. 10—14. III. emelet 33.), illetve érdeklődni lehet a 326-946 telefonszámon.

Budapest, 1986. május 8.

Művelődési Minisztérium

Imrecze Zoltánné—Reiman István—Urbán János

Fejtörő feladatok felsősöknek

általános és középiskolai tanulók számára

„Ezzel a könyvvel az általános iskolai új matematika-tanterv nyomán fellépő igényt kívánjuk kielégíteni: olyan feladatgyűjteményt adni az érdeklődők kezébe, amelynek tartalma a tantervhez igazodik, és olyan feladatok vannak benne, amelyek a tankönyvekben nem találhatók. Ugyanakkor a feladatok megoldását csak olyan eljárásokkal mutatjuk be, amelyek nem lépik túl az általános iskolások matematikai ismereteit.

A feladatok nagyobb része előfordult a KMBK versenyek valamelyikén vagy az Iskolarádió „Törd a fejed!" műsorában, vagy az Iskolatelevízió „Aki mer az nyer!" című vetélkedő sorozatában, azért lehet, hogy közülük néhány már ismerős."

FONÓDI GYULA
vezető szakfelügyelő
Debrecen

Az általános iskolai matematikatanítás helyzete, eredményei és problémái

Az általános iskolai matematika tanításának elemzését részben Hajdú-Bihar megyei, részben országos tapasztalatokra építem. Vezető felügyelői értekezleteken ezek az észrevételek ugyanúgy elhangzottak, mint megyénkben bármely munkaközösségi foglalkozáson vagy szakfelügyelői elemzésekben.

Általános az a megállapítás, hogy az általános iskolában bevezetett új matematika művelődési anyag valóban korszerű és társadalmi szükségletet elégít ki. Kellett, hogy korszerűsödjék a matematika tanítása tartalmilag és módszertanilag egyaránt.

Egyet kell értenünk a korszerűsítés lépcsőzetes bevezetésével is országosan. A tartalmi és módszerbeli változás olyan mély és széles körű volt, hogy a tulajdonképpen 12 évre elhúzódott bevezetése indokoltan szükségszerű volt.

A matematika tanításának tartalmi és módszerbeli megújítását célzó kísérletek már 1963-ban elkezdődtek. Tudomásom szerint a következő iskolákban és években folytak kísérletek az országban:

— 1963, Budapest, Váci u. Általános Iskola két első osztályában kezdődött a kísérlet,
— 1965/66, Budapest, Jázmin u. Általános Iskola 1. osztályaiban,
— 1965/66, Budapest, Szinyei Merse u. Általános Iskolában, amely az OPI kísérleti iskolája lett,
— 1967/68, Székesfehérvárott.
— Az 1970/71. tanévben már 100 kísérleti osztály működött az OPI és az MM felügyelete alatt.
— Az 1974/75. tanévben az ún. „ideiglenes tantervű" matematika kezdődött meg országosan az iskolák kb. 7,5%-ában, a lépcsőzetes bevezetése így ebben a tanévben indult el.
— 1978/79. tanévtől — szintén lépcsőzetes bevezetéssel — az új tantervű matematikát kezdtük tanítani az országban.
— 1985-től kezdve már minden 8. osztályos tanuló az új, korszerű matematika művelődési anyagot tanulja iskoláinkban.

Az Oktatási Miniszter 114/1977/M. K. 11/OM rendelete alapján a komplex matematikatanítás Szendrei-féle változata került bevezetésre 1978-ban az első és az ötödik osztályok 7,5%-ában, amelyet C. Neményi Eszter és Radnainé Szendrei Júlia, valamint Varga Tamás dolgoztak ki.

Már a bevezetés kísérleti időszakában alapvető hibának tartom a következőket:

— A kísérletekről, azok eredményeiről, az új matematika művelődési anyagról, a kísérleti módszerekről, de legfőképpen a kísérletek *eredményeiről* semmit sem tudtunk 1973-ig. Nem volt megfelelően publikálva legalább vezető felügyelői szinten sem.
— Elismerve a tartalmi korszerűsítés szükségességét, most már látható, hogy ezt a korszerű matematikai anyagot nem adaptálták bátran és kellően szelektálva a magyar társadalmi és gazdasági viszonyoknak megfelelően. Túl nagynak sikerült a minőségi ugrás. Kissé kritikát-

lanul vettük át külföldről azokat a matematikai témaköröket és magát a módszertani kultúrát is, amelyeknek jó része ma már jól érzékelhetően nem vált be az iskolai gyakorlatban. Nem szűrték meg a kísérletek tapasztalatai alapján a matematika anyagát sem mennyiségileg, sem minőségileg.

— Véleményem szerint a kísérletek nem elégítették ki a tudományos kutatás kívánalmait. Minden kísérletnek és kutatásnak van vagy kell legyen egy hipotetikus *célja*, aminek a bizonyításához (vagy esetleg cáfolásához) a kísérlet- és kutatásvezető egy folyamatot tervez meg. *Ennek a folyamatnak van valamilyen eredménye.* A rögzített eredmény vagy a hipotézist igazolja, vagy megmutatja annak hibáit, ellentmondásait.

A folyamat közben részeredményeket is kell mérnünk, amelyek vezérlik menet közben is a kutatást, a kísérlet folyamatát. Vagyis az eredmények kell, hogy menet közben korrigálják a folyamatot, vagy magát a kutatás célját (vagy a célnak a tapasztaltak alapján történő korrigálását).

Úgy tudom, hogy ilyen eredménymérések nem voltak a kísérleti időszakban. Vagyis a menet közbeni korrekció teljesen elmaradt. Országosan bevezetésre került a matematika korszerű anyaga egy olyan hipotézis alapján, amelynek az eredményessége még csak részben sem volt bizonyítva pl. statisztikai módszerekkel. Véleményem szerint 1963-tól 1974-ig a szükséges és elégséges mérések elvégzésével a mostani országos gondok nagy részét el lehetett volna kerülni, s most nem kellene a korrekcióval tűzoltó munkát végezni. Így történhetett meg az pl., hogy az 5. és a 6. osztályos matematika-tankönyvek teljesen kipróbálatlanul kerültek ki a tanulókhoz és a tanárokhoz, amelyek szinte nem használhatók a gyakorlatban.

Ezek után megemlítek néhány hibás nézetet, amelyek miatt gondokkal küzd ma a matematikatanárok zöme az általános iskoláinkban. Hajdú-Bihar megyei méréseink alapján is mondhatom, nem teljesen eredménytelen a matematika tanítása általános iskoláinkban. Nem azt akarom bizonyítani, hogy a húsz évvel ezelőtti matematikatanítás eredményesebb volt. Néhány hibás nézet miatt azonban nem olyan eredményes a matematika tanítása ma, mint az elvárható lenne. Ezeknek a gondoknak nagy része elkerülhető lett volna akkor, ha a kísérleti időszak tapasztalatait objektívebben, reálisan és gondosan elemzik, pontosabban határoznak meg fogalmakat az arra illetékes szakemberek.

1. hiba

Nem teljes igazság az, hogy a „régi" iskola csak számolási készséget követelt a tanulóktól, és receptszerű ismeretek nyújtása volt elsődlegesen a célja a tanításnak.

Sohasem volt teljesen öncélú az egyszeregy és a műveletek tanítása. Nem igaz, hogy csak receptek tanítására törekedtünk.

Ennek a minden régit tagadó nézetnek mi lett a következménye?

Az, hogy ennek az igen fontos matematikai alapműveltségnek a teljes elhagyása veszélybe sodorta az egész matematikai épületet! Most kezdjük érezni ennek a rettenetes hiányát a tanulóknál, nemcsak az általános, de minden középfokú iskola is, különösen a szakmunkásképzés.

M. N. SUYDAM írja — gondolom kritikaként — A matematikatanítás forradalma című munkájában a következőket a nálunk is bevezetett Dienes-módszerről:

„A figyelem középpontjában inkább a matematikai fogalmak állanak, nem pedig a készségek (nálunk inkább ké-

pességeknek nevezzük) fejlesztése annak a meggondolásnak alapján, hogy a készségeket esetlegesen, mellékesen is el lehet sajátítani a különböző és sokféle matematikai tapasztalatok szerzése során."

Hát bizony, nem lehet a matematikai alapműveltséget vagy magasabb rendű műveltséget csak úgy „mellékesen" megszerezni. Ezt a gyakorlat bebizonyította. Nem igaz az, hogy „elegendő az, ha a tanulók a 8. osztály végére (!) megtanulják a szorzó és bennfoglaló táblát."

2. hiba

Helytelennek tartom azt a nézetet is, hogy a „régi" iskolában a tanulók tapasztalat nélkül, csakis közlés útján jutottak el a matematikai ismeretekhez.

Mit ajánlottak ehelyett a matematikatanároknak?

„Fedeztessük fel a matematikát a tanulókkal a maguk szintjén a különféle eszközök segítségével!"

Szerintem kidolgozatlan az eszközök nagymértékű használatára épített matematikatanítás, az eszközökkel történő felfedeztetése a matematikai fogalmaknak. Ez is oka lehet pl. a számfogalom terén ma tapasztalható tanulói ismerethiányoknak.

Nem kidolgozott és ellenőrzött módszerek ezek, használatuk igen sok időt igényel a tanítási órákon, s meglepő módon azt kellett tapasztalnunk, hogy a sokféle mesterséges tanulási eszköz szinte inkább gátja a matematikai absztrakcióknak, mintsem aktív segítője a fogalom kialakulásának. A gyakorlat erre rájött. A kísérlet során ezt nem lehetett megfigyelni?

Kitűnt, hogy az eszközök csak tapasztalatszerzésre adnak lehetőséget, igazi matematikai absztrakciókra nem. Tévedés az, hogy a számegyenesen állandóan „számlálgató" gyermekben kialakul a természetes szám fogalma, a műveletnek a fogalma. Ugyanígy a lyukas táblán a lyukak számlálgatása, vagy a mérés színes rudakkal hosszú ideig történő alkalmazása annyira lehetetlenné teszi a szám és a művelet fogalmának a kialakítását, hogy az már egyenesen káros.

Ezeknek az eszközöknek a túlzott használata rendkívül lelassítja a fogalomalkotás folyamatát. Egy-egy órán pl. az első osztályokban a *matematikai tevékenysége* igen kevés a tanulóknak, vagyis nem matematikai fogalmakkal tevékenykednek, hanem egészen más fogalmakkal, amelyek valóban lekötik a tanulókat, mivel pl. a színekkel kell a színes rudakkal folytatott műveletek során foglalkozniuk, de nem azok matematikai tartalmával. Ezért születnek ilyen gyermeki ítéletek a matematikaórákon, hogy pl. a rózsaszín rúd meg a világoskék egyenlő az x színű rúddal, amely ítéletnek semmi köze nincsen a matematikához. Nem tudom elhinni, és a valóságban ez be is bizonyosodott, hogy ebből absztrahálódik egy matematikai művelet, az meg végképpen érthetetlen számomra, hogy miért és hogyan lesz tényleg közelibb a gyermeknek „így", hogy két természetes szám összege mennyi is hát?

Időben kellene felfigyelnünk nagy pedagógusaink, gondolkodóink figyelmeztetéseire. Így az eszközökkel kapcsolatosan PIAGET joggal figyelmeztetett arra az alapvető hibára, ami főként a „modern" matematikatanításban alkalmazott színes rudak és más hasonló eszközök használatakor figyelhető meg.

Túlságosan előtérbe kerül az alak és a szín az eszközök használatakor, ezek dominálnak, és ez elnyomja az operatívat, a műveletek, a fogalmak tekintetében szükséges előrehaladást, a matematikai gondolkodás kifejlesztését.

Ennek egyrészt az a tanulsága, hogy a tanulási munka megkedveltetése érdekében a tanulást nem lehet helyettesíteni *játékkal*, másrészt a különböző eszközöknek, amelyek alkalmasak manipulációra, mindenkor a *célszerű* felhasználására kell törekedni.

Ezt szerintem nem tisztázta annak idején a kísérlet.

Valószínűleg ez lehet az oka annak, hogy az általános iskolák matematikaszertáraiban, szekrényeiben nagy mennyiségben lapulnak meg felhasználatlanul a drága pénzen vásárolt taneszközök.

3. hiba

Tapasztalataink szerint a túlhajtott önálló, felfedező matematika tanulása az eszközökkel túlságosan divergens gondolkodást enged meg a tanulóknak. Pedig a tanulás — valóban — komoly szellemi tevékenység, nem játék.

Véleményem szerint nem szabad teljesen a tanulókra bízni az interiorizációs folyamatot.

Vagyis: 1. feladatok és problémák felismerését (mert ha azokat nem is ismeri fel a tanuló?),
2. a problémáknak a megragadását (mert ha azokat nem képes megragadni a tanuló?),
3. a gondolatmenet kialakítását, az absztrahálást, a generalizálást (mert ha ezekre egyáltalán nem képesek a tanulók?).

Sokkal jobb tanítási elvnek látszik az „irányított felfedeztetés", amely folyamatban a nevelő valóban *irányítja a tanulási folyamatot, lerövidíti az ismeretszerzésnek az útját és idejét, a lényeget figyelteti meg a tanulóval az eszköz használatakor, nem engedi elkalandozni messzire a lényegtől. Vagyis, optimális időtartamúra szerveződik a fogalomalkotás.*

4. hiba

Az első osztálytól a nyolcadik osztályig a matematika mind a nyolc tudományterülete egyforma súllyal szerepel az egyes évfolyamok anyagában. Így a halmazok, a matematikai logika, aritmetika, algebra, geometria, valószínűségszámítás, kombinatórika és statisztika.

Ez felvetette — különösen alsótagozatban — a *mennyit* és a *mit* tanítsunk kérdéseket az iskolákban.

Bizony, e téren szinte teljes lett az első években a sötétség. Ma már kicsit világosabban látjuk ezt a kérdéskört.

Megjelent — előző kérdések megoldására javaslatként — a pedagógus köztudatban a „fogalmak érlelgetésének" az elve.

Ez a gyakorlatban ezt jelentette, hogy egy-egy matematikaórán a matematika minden területével egyformán foglalkozni kell. Ez az elv ma már szinte teljesen csődbe jutott, különösen az alsótagozatban, mivel a felsőtagozatos nevelők ezt szinte kezdettől nem fogadták el.

Valószínűleg ez a hibás elv az oka annak, hogy a numerikus számolási képessége a tanulóknak az utóbbi években szinte visszafejlődött az alsó és felsőtagozatban egyaránt. Ennek a gyakorlására ugyanis igen kevés idő jutott, pedig — véleményem szerint — az aritmetikai biztos és szilárd, begyakorlott fogalmak, így a számfogalom, a számokkal végzett műveletek fogalma a műveletek tulajdonságai és összefüggéseinek tudása alapja az összes többi matematikai, magasabb rendű fogalomnak.

Bizony, ezen a gondon nem segít a „hosszú érlelgetés" elve sem a gyakorlatban, mivel a fogalmak, matematikai vagy más fogalmak, csak megfelelő gyakorlással szilárdulhatnak meg, tudatosan és tervszerűen szerkesztett feladatsorokon és feladatrendszereken át. Nem életkortól függően érnek be a fogalmak és nem önmaguktól, hanem igen jól felépített tanítási órák rendszerében. Ha viszont minden órán ilyen széles körben kell a tanulóknak foglalkozniuk a matematika különböző tudományterületeivel, akkor éppen a matematikai alapműveltség megszilárdítására jut igen kevés idő. A megnövekedett matematikaanyag mennyisége lehetetlenné tette a matematikai alapműveltséget adó folyamatos és tervszerű gyakorlások rendszerét.

Az igen látványos es a matematika sok területét felölelő alsótagozatos matematikaórák, amikor is „mindennel" foglalkoznak a tanulók, de egyetlen témakörben sem mélyednek el igazán a tanulók,

ma már világosan bizonyítják az ilyen felépítésű matematikatanítás eredménytelenségét.

Hajdú-Bihar megyében négy évig összegeztük a tanulók tanév végi matematika-osztályzatait.

Az 1983/84. tanévben ez a következő képet mutatta:

	5. osztály	6. osztály	7. osztály	8. osztály
ötös:	14,4%	11,8%	11,9%	11,3%
négyes:	26,3%	24,7%	25,5%	21,1%
hármas:	26,5%	33,1%	34,8%	30,3%
kettes:	30,4%	27,5%	25,9%	36,7%
egyes:	2,4%	2,8%	1,9%	0,6%

Az évek során jól érzékelhető volt az a tendencia, hogy folyamatosan növekedett az elégséges osztályzatot elérő tanulók aránya, különösen a 8. osztályokban. Ma már a tanulóknak közel 40%-a kettes osztályzattal fejezi be a 8. osztályt, a kettes és hármas matematikaosztályzatot kapott tanulók aránya pedig együtt közel 70 százalék.

Ez véleményünk szerint nem egészséges jelenség. Nem hiszem, hogy ennyi, viszonylag gyenge képességű, tanulni nem akaró tanuló van iskoláinkban. Másra kell az okokat visszavezetni. Való igaz az is, hogy a matematika kettes osztályzat igen kevés tudást takar sok tanulónál. Ezeknek a tanulóknak szinte 100%-a szakmunkásképző iskolákban folytatja a tanulást, de a felméréseink szerint olyan kevés matematikai alapműveltséggel rendelkeznek, hogy kétséges (a mai korban!) az, hogy valóban „művelt", a korszerű technikát jól értő és használni tudó szakmunkások lesznek három év múlva.

Mindezeket figyelembe véve a matematika tantervi korrekcióra a következő javaslatokat teszem meg.

1. A tantervi korrekciót az 1—8 osztályokban kell megvalósítani és nem külön az 1—4 és 5—8 osztályokban.

2. A matematika jelenlegi tantervi anyagát jelentősen csökkenteni kell, évfolyamonként és összességében legalább 20%-kal, mert túlméretezett. Ésszerűbben és arányosabban kell elosztani a matematika művelődési anyagát az egyes évfolyamok között, különösen az 1—3. osztályokat tekintve a *matematikai fogalmak megalapozóak legyenek.* Nem kell pl. egyáltalán alsótagozatban számrendszerekkel foglalkozni, mivel tapasztalataink szerint nem a különböző számrendszerekkel való foglalkozás alapozza meg a tízes számrendszer fogalmát, hanem a helyesen és pontosan, begyakorlottan kialakított tízes számrendszer megértése után értik meg a tanulók a különböző alapú számrendszereknek a fogalmát.

3. Nagyon fontosnak tartom a tantervi követelmények jelenleginél sokkal pontosabb értelmezésének a korrekcióját.

Konkrétabb és pedagógiailag jobban indokolt *tudásszintek* meghatározása szükséges.

4. A matematika-tankönyvek a tantervi anyag pontos kijelölése után készüljenek el. A tananyag feldolgozása kövesse a tanmeneti sorrendet, óráról-órára, az anyag feldolgozása rövid és világos legyen, legyen a tankönyvben elegendő gyakorló feladat és feladatrendszer.

A tankönyvek a teljes tantervi anyagot kötelezően kell, hogy tartalmazzák! Szabályokat, definíciókat és a tételeket rövid, világos és egyszerű formában kiemelten tartalmazzák a tankönyvek.

Szükségesnek tartom az alsótagozat minden osztályában is a matematika-tankönyvek megjelentetését.

5. A munkafüzetek jelenlegi formája és tartalma alkalmatlan a tanulásra, gyakorlásra. Ha egyáltalán kellenek a munkafüzetek úgy egészen más felépítés és tartalom látszik szükségesnek a mostani-

tól; például a tankönyvhöz és a tantervi anyaghoz szorosan kapcsolódjanak.

6. Feltétlenül tisztázni kell az eszközöknek a helyét és a szerepét a matematikatanulás, a fogalomalkotás folyamatában.

7. A jó tanári kézikönyvek utáni nevelői igényeket ki kell elégíteni.

8. A korrekció során a tantervben meg kell határozni a matematikai alapműveltség anyagát *minimumként* úgy, hogy az megfeleljen a jelen kor gazdasági és társadalmi igényeinek is. Ezért a túlzott elméletieskedés helyett a gyakorlatibb matematikatanítást — az arányok megtartásával — is tartalmazza a tanterv követelmény rendszere. Gondolni kell arra pl. hogy a szakmunkásképző iskolákban továbbtanuló gyermekeknek milyen ismeretekre és készségekre van szükségük.

A jelenlegi Nevelés és Oktatás tervében körvonalazott nevelési és oktatási célok, feladatok jók, azokon túlzottan változtatni nem kell. Jó a matematikatanítás cél és feladatrendszere is. Továbbra is alapvető feladatunknak kell tartanunk a személyiségfejlesztést a tanórákon, kiemelve az emlékezés, megértés, konstrukció, ítélőképesség, gondolkodó képesség fejlesztését.

Véleményem szerint elsősorban és alapvetően a matematika-tanterv művelődési anyagának összetételén, arányain, szerkezetén és a mennyiségén kell korrigálni. Feltétlenül újra kell gondolni a tanuláshoz szükséges eszközrendszer használatának kérdéseit, új és valóban használható tankönyvek, tanári kézikönyvek kellenek. Elvi, elméleti tisztázásra vár több kérdés, pl. az alapműveltség köre a matematikában, a tanulás fogalomalkotási szakasza eszközzel, a felfedeztető matematikatanulás, a differenciált képességfejlesztés, és még több fogalom, vagy a követelményrendszerben a tudásszinteknek a pontosabb értelmezése, értelmeztetése stb.

Az egyre növekvő eredménytelenségbe nem lehet és nem belenyugodnunk. A diagnózis, a „látlelet" most már rendelkezésünkre áll, ismerjük az okokat. Meg kell keresnünk a legmegnyugtatóbb megoldásokat a korrekciós munkában.

Biztosan nem egy-két év kell a helyes, vagy helyesebb út megtalálásához, de a megfelelő tanulságok leszűrése után meg kell hamarosan kezdeni a matematika tanításának korrekcióját.

Reprezentatív mérés

MATEMATIKA
(7. osztály)

Hajdú-Bihar megye (1985 október)
(Hét iskola, 480 tanuló)

Mérés időpontja: 1985 október.

Célja: Milyen matematikai ismeretekkel, képességekkel és műveleti készségekkel rendelkeznek az alsóból felsőtagozatba került tanulók.

Feladatok és százalékos teljesítések:

1. Írd le számjegyekkel:

— Háromszázötezer-kilencszáznegyvenhét: .....
— Hetvenezer-kilencven: .....
— Kétszáznégyezer-hétszázhatvan: .....
— Egymillió-hatezer-tizenkettő: .....

Teljesítmény: **78,4%.**

2. *a)* Mennyi az általad leírt négy szám összege?
Teljesítmény: **69,5%.**

b) Mennyi az általad leírt legnagyobb és legkisebb szám különbsége?
Teljesítmény: **60,5%.**

3. *a)* Pista zsebében csak ötforintosok vannak. Az ötforintosok száma több, mint három, de nem több, mint nyolc. Hány darab pénz lehet Pista zsebében?

Teljesítmény: **50,2%.**

b) Legalább hány forintja lehetett?

Teljesítmény: **33,8%.**

c) Legfeljebb hány forintja lehetett?

Teljesítmény: **28,3%.**

4. Végezd el a műveleteket:

a) $\begin{array}{r} 483\,200 \\ -\ 74\,873 \\ \hline \end{array}$ *b)* $3879 \cdot 805$ *c)* $51\,856 : 7 =$

Teljesítmény: **70,8%.** Teljesítmény: **45%.** Teljesítmény: **66,3%.**

d) $720 - 120 : 4 + 5 \cdot 70 =$

Teljesítmény: **8%.**

5. *a)* Melyik az a szám, amely 108-szorosa az 560-nak?

Becslésem: .....
Számításom:

b) Melyik szám 8-szorosa a 24 538?

Teljesítmények: Becslés **19,6%.**
Szorzás **29,6%.**
Osztás **37,5%.**

6. Ábrázold számegyenesen a következő számokat.

$\frac{3}{4}$; $\frac{10}{10}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{1}{2}$.

Teljesítmények: Számegyenes „egy" egységét 8 kis résznek jelölte: **42,1%.**
Helyesen ábrázolt: **33,5%.**

7. 24 576 cm = ... m ..... dm ..... cm

7574 liter = ... hl ..... liter

8 óra 14 perc = ... perc

9 km 16 m = ... méter

Teljesítmény: **54,5%**

8. Egy téglalap szomszédos oldalainak hossza: 15 cm és 24 cm.
Mennyi a kerülete? Mennyi a területe?

Teljesítmény: Kerület **47,1%.**
Terület **37,4%.**

9. Egy tanuló 3 nap 450 kg almát szedett. Az első napon 165 kg-ot, a második napon 98 kg-ot. Mennyi almát szedett a harmadik napon?

Teljesítmény: Megoldási tervet készített **40,8%.**
Helyesen számolt **46,9%.**

A tanulók összteljesítménye: **48,3%.**

Értékelés feladatonként:

1. A tanulóknak kb. 30%-a azért hibázik, mert nem tud olvasni! Osztályonként igen nagyok a teljesítménykülönbségek. Legtöbb gondot a nullák írása okozta. Igen sok a figyelmetlen munkára utaló, felületes írás.

2. *a)* Hibásan leírt számok összege, ha helyes volt, elfogadtuk.

Jellemző hibák:

— egy oszlop összeadásakor az előző oszlop maradékát nem adják hozzá a tanulók;
— a pontos számolásra nincsennek kellően nevelve a tanulók;
— figyelem és koncentráció hiányok mutatkoznak.

b) — a kivonásnál a maradékkal nem tudnak mit kezdeni;
— ha nulla van a kisebbítendőben, nem tízre pótolnak.

3. Nagyon kevés tanuló adott teljes megoldást. A szövegnek azt a részét igen kevés tanuló értette meg, hogy „de nem több, mint nyolc."
Igen nagy zavar tapasztalható a *legalább* és a *legfeljebb* értelmezésében és az értésében. Ezek a fogalmak egyáltalán nem tiszták és értettek a tanulók zöménél, ezek matematikai jelentése, az alsó és felső határok kijelölése. Összes megoldást igen kevés tanuló adott, egyrészük annyira igénytelenséget mutatott az egyetlen szám megjelölésével.

4. Aggasztó hibák fordulnak elő a természetes számokkal végzett műveletekben.

— Nem ismerik az algoritmusokat, pl. a részletszorzatok helyi értékét figyelmen kívül hagyva írják azokat egymás alá, vagy figyelmen kívül hagyják a nullával való szorzást.
— Van tanuló, aki ha nullával szoroz, tényleges számot kap.
— A műveleti sorrend szinte teljesen fehér folt a tanulók ismeret- és tudásrendszerében. Önkényesen szinte minden tanuló zárójelet tett ki a feladatban, azt máshogyan el sem tudják képzelni, de azokat is rosszul, helytelen műveleti sorrendet jelentőeket. A tanulók ezek szerint csakis a zárójelek elsőbbségét értik, s nem azt, hogy melyik művelet köt erősebben? Gyakorlatilag nem ismerik a tanulók azt, hogy a szorzás és az osztás eredménye — egyetlen szám.

5. Igen nagy baj van a szövegértéssel. Nyitott mondatokat egyáltalán nem írtak fel a tanulók, az az a műveletekre csak „tippelnek", szorzok vagy osztok? Az egyenlet felírásának éppen a helyes művelet megtalálásában lenne a szerepe,

pl. a *b)* feladatnál: [8 szorozva (..).=24 538
(..).=24 538:8=

Becslés nem ismert fogalom, ötletszerűen végzik és még pl. az egyesek helyén álló számot is beírják becslésként.

6. Iskolánként, osztályonként az eredmények igen változóak. A tanulók többsége nem tudott célszerűen számegyenest rajzolni. Többen 10 egyenlő részre osztották a számegyenest. Volt tanuló, aki a 3/4 és a 7/8-ot egyazon helyen jelölte, így a nagyságrenddel nincsenek tisztában. Sok volt a pontatlanság is, mivel a kis egységek sok esetben nem egyenlőek voltak, mivel a beosztást szabad szemmel készítették el.
Több esetben volt tapasztalható, hogy a 3/4 törtszám helyét a 3 és a 4 egész között keresték a tanulók.

7. A legtöbb hiba a hosszúság mértékváltásánál volt, valószínűleg szokatlan volt az ilyenféle váltás a tanulóknak. Az egységeket ismerik a tanulók, az átváltási algoritmusokat viszont nem kellően

8. A tanulók nagy része nem ismeri és keveri a fogalmakat. Gyakorlatlanságra is utalnak a gyenge eredmények. A hibák igen változatosak, van tanuló, aki semmit sem csinált, vannak, akik a kerületnél nem szoroztak kettővel, és nagyon sokan nem tesznek ki semmilyen mértékegységet, vagy felcserélték a cm és a cm^2 fogalmát.

9. Mivel nem utasított a szöveg arra, hogy készíts megoldási tervet, így a tanulók nem is készítettek azt. Felületesen válaszolnak a kérdésre a tanulók. Sok esetben csak számolnak, el is jutnak a helyes eredményhez, de válasz, mértékegység nem található.
Általában a feladatmegoldások nem áttekinthetőek, össze-vissza számolnak a tanulók.
Mivel ezek a feladatok — néhány kivétellel — minimumszintűek voltak, és egyszerű összefüggéseket tartalmaztak, megoldásuk jól elvárható a tanulóktól. Igen alacsonynak tartjuk a tanulóknak a **48,3%**-os összteljesítményét.

Az alapműveletek begyakorlottsági szintje alacsony. Igen lassan és pontatlanul dolgoznak a tanulók. Mivel a feladatlapon önállóan kellett dolgozniuk, olvasniuk a szöveget, mégértésbeli problémák is előjöttek.

Úgy látjuk, hogy nehéz építeni mindezekre az alsóból hozott ismeretekre és tudásra a felsős matematikatanároknak. Túlságosan szerteágazó az alsótagozatos matematikaanyag. Sokmindennel foglalkoznak, de igen alacsony szinte minden fogalom begyakorlottsági szintje.

Reprezentatív mérés

MATEMATIKA
(8. osztály)

Hajdú-Bihar megye (1985 október)
(Hét iskola; 445 tanuló)

Célja: Matematikai alapműveletek, ismeretek és készségszintek feltárása. Összehasonlítása a mérési eredményeknek a szakmunkásképző intézményben végzett hasonló mérés eredményével.

Feladatok és százalékos teljesítések:	*Százalékos teljesítmény*	
	Általános iskola	Szakmunkás
1. Írd le betűkkel:		
a) 1 806 504:	72,2	73
b) 1203,015:		
2. Írd le számjegyekkel:		
a) Kétmillió-huszonháromezer-tizenkettő:	77	63,2
b) Nyolcezer-egyegész-négyszázhárom ezred:		
3. A következő feladatokat írásban oldd meg!		
a) 1486-ból mennyit kell kivonni, hogy 395-öt kapjunk?	80,4	76,5
b) Mennyivel több az 501 a 2-nél?	87,6	95,6
c) Két szám összege 600. Az egyik szám 18,8. Mennyi a másik?	76,2	64,2
d) Két szám különbsége 411.4A kisebbítendő 6520. Mennyi a kivonandó?	69,7	52,5
e) Melyik az a szám, amelyikben a 195 pontosan 15-ször van meg?	68,5	55,3
f) Melyik számnak a 2,5-szöröse 7000?	55,7	36,6
g) Hányadrésze a 624-nek az 52?	74,6	61,5
h) Melyik számot kell 15-tel elosztani, hogy a hányados 43, a maradék pedig 3 legyen?	56,4	44,4
4. Végezd el a kijelölt műveleteket:		
$156-70:5+4\cdot 3=$	53,7	8,6 (!)
5. Egy osztályban háromszor annyi lány van, mint fiú. Az osztály létszáma 44 tanuló. Hány fiú és lány van az osztályban?	53,7	39,8
6. Egy téglatest alakú akvárium méretei:	*Térfogat jó:*	
6 dm; 3 dm; 2 dm.	44,5	17,7
A színig töltött edényből kiöntjük a benne levő víznek a 25%-át. Hány liter víz marad az akváriumban?	*75% 27 liter:* 23,4	10,4
7. Ha 3 kg kávéért 255 Ft-ot fizettünk, akkor ugyanebből a kávéból mennyibe kerül 50 dkg-nyi?	64,6	39
8. Egy 20 cm oldalhosszúságú négyzetalakú vaslemezből a lehető legnagyobb köralakú lemezt vágjuk ki. Hány százalék lesz a hulladék?	*Négyzet ter.:*	
	51,7	17,7
	Körlap ter.:	
	36,9	15,3
	Százalék jó:	
	22,8	5,5
A tanulóknak átlagteljesítménye:	**48.4%**	**38,1%**

Értékelés feladatonként:

1. Pontatlan leolvasások miatt sok — viszonylag — a hiba.
2. Többen a tizedesvesszőt figyelmen kívül hagyják. Ezred helyett századot sőt tizedet (!) írnak. Rengeteg a helyesírási hiba.

3. Igen sok a helytelen szövegértelmezés, a művelet rossz megválasztása. Egyenleteket alig írnak le a tanulók. A műveleti összefüggések inverzek alapján nem dolgoznak. Sok a számolási hiba is.
4. A műveletek elvégzésének a sorrendje még itt a 8. osztályban sem elfogadható szinten áll. Mechanikus tudást takar az, hogy a tanulók ismeretei szerint a műveletek elvégzésének a sorrendje a következő:
„szorzás, osztás, összeadás, kivonás" — mivel a következőképpen végezte el több tanuló a kijelölt műveleteket:

$$156-70:5+4\cdot 3 = 156-14+12 = 156-25 = !!!$$

Az az, a tanult műveleti sorrendet abszolút módon kezelik, teljesen helytelenül!
5. A látszólag egyszerű feladatban az összefüggéslátás hiányai mutatkoznak meg abban, hogy sok tanuló 3 egyenlő részre akarta az osztálylétszámot bontani. Egyenletet is csak kis része írt fel a tanulóknak.
6. Zavaros a tanulók zömének a gondolkodása a feladat megoldásakor. Nem a feladat számolási nehézségei, inkább az összetettsége okozott láthatóan gondot a tanulóknak. Sajnos, a térfogat és a felszín fogalmát keverik. Elmaradnak a mértékegységeknek a kiírásai. A tanulók munkáit elemezve a százalékszámítás igen zavaros.
7. Az eredmény elfogadható, bár néhány tanuló egyszerűen a 255 Ft-ot elosztotta 50-nel (!)
8. Kevesen oldották meg ezt a feladatot helyesen. Sokan hozzá sem tudtak kezdeni a megoldásához. Többen azt hitték, hogy a kevés adat miatt csak „becsülni" kell a megoldást. (!)
Ezt az eredményt a területszámításokat tekintve nem lehet elfogadni! Keverednek a kör terület és kerület fogalma a képletekben. A százalék kiszámításakor nem tudják, hogy mit mihez viszonyítok? stb.

Általános értékelés:

Az általános iskolákban minden tanulóra vonatkoztathatunk a mérési eredményeket tekintve, azaz az ötös tanulók éppen úgy részt vettek a felmérésben, mint a kettes vagy bukott tanulók. Ugyanezt a mérést a szakmunkásképzők első osztályaiban is elvégeztük, de az általános iskolákból odakerült tanulók több, mint 90 százaléka kettes matematika-osztályzattal lett ipari tanuló. Ez látszik meg az eredményeikben is. Igen nagyszámú tanulólétszámot jelent ez, mivel az általános iskolát végzett gyerekeknek az 54%-a folytatja a tanulmányait valamilyen szakmunkásképzőben.

Sajnos, ezeknek a tanulóknak a matematikai alapműveltsége rendkívül alacsony szinten áll. Tudásuk bizonytalan, s nagyon kevés. Ennek az eredménytelenségnek vannak tanári, pedagógiai, módszertani hiányokban keresendő okai is, de vannak ezeken kívüli, pedagógiai munkán túlmutató társadalmi okai is, amelyekkel itt most nem kívánok foglalkozni.

Nem lehetünk elégedettek a 8. osztályos felmérési eredményekkel sem természetesen. Minimum-követelményeket mértünk, amiknek a teljesítési szintjét 80—90% körül kell megszabnunk. Sajnos, a **48,4%**-os teljesítménye a 8.-os tanulóinknak ettől igen messze áll. Keressük a javításának lehetőségeit és a jó és jobb módszereket ahhoz, hogy matematikailag műveltebben kerüljenek ki tanulóink az általános iskolából a középfokú intézményekbe.

Ehhez a munkához azonban át kell tekinteni a matematikatanítás korszerűsítésében eddig megtett utunkat. Az a célom ebben a tanulmányban, hogy bizonyos alapvető összefüggésekre, elkövetett hibákra rámutassak, elemezve az 1978 óta eltelt időszakot a gyakorló pedagógus szemszögéből.

Néhány gyenge eredmény okát szeretném kimutatni a matematikatanítás korszerűsítési folyamatában elkövetett hiba elemzésével. Nem tartom ugyanis reálisnak azt, hogy rendkívüli módon megnövekedett az elégséges és a közepes osztályzatot elérő 8. osztályt végzett tanulóknak az aránya. Ráadásul a kettesek tudásszintje, akiknek az aránya Hajdú-Bihar megyében már közel 40%-a a végzett nyolcadikosoknak, olyan kicsi, hogy arra nem tud építeni, azt nem tudja továbbfejleszteni a szakmunkásképző intézmény.

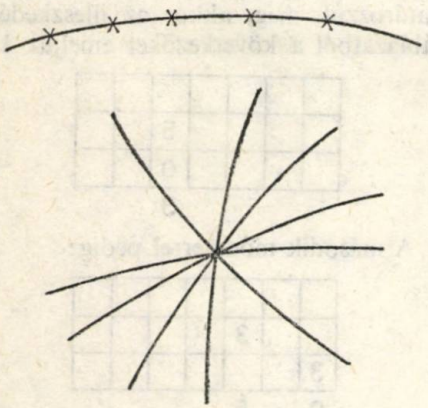
LÉNÁRT ISTVÁN
laboráns
Budapest

Axiomatizálás a gömbfelületen III.

23. Ez után a rövid kitérő után — vissza a síkhoz!

Kétféle módszert láttunk eddig projektív síkok előállítására: a gömbi alapidomok közti geometriai szerkesztés módszerét, és a művelettáblákat.

Másféle előállításhoz jutunk, ha egy adott főkörre *illő*, rajta fekvő pontok, illetve egy adott pontra *illő*, azon átmenő főkörök fogalmából, geometriai képéből indulunk ki:



Tegyük fel, hogy elő akarunk állítani egy, hét elemből álló projektív síkot. Ehhez először is felveszek hét darab „ilyen" elemet, és hét darab „olyan" elemet (tehát egyenlőre kétszer annyit, amennyire végülis szükségem lesz). Nevezzük az első hét darab elemet „pontok"-nak, a második hét darab elemet pedig, mondjuk, „egyenesek"-nek (hívhatnánk főköröknek is, nem a név számít); és jelöljük őket rendre p_0-, p_1-, p_2-, p_3-, p_4-, p_5-, p_6-tal, illetve e_0-, e_1-, e_2-, e_3-, e_4-, e_5-, e_6-tal. Tekintsük most a következő táblázatot:

p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_0
p_3	p_4	p_5	p_6	p_0	p_1	p_2
e_0	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

Mit jelent ez a táblázat? Vegyük a e_3-nal alatt álló e_0 „egyenest": e fölött az „egyenes" fölött a táblázatban a p_0, p_1, p_3 „pontok" állnak, amit úgy értelmezünk, hogy az e_0 „egyenesre" a p_0, p_1, p_3 „pontok" *illenek*, fekszenek rajta. Ugyanígy értelmezzük az „illeszkedést" a többi „egyenes" és „pont" esetében is.

24. Ez az értelmezés így még teljesen önkényesnek tűnik — milyen további feltételeket kell még ennek a táblázatnak kielégítenie ahhoz, hogy a „pont", „egyenes", „illeszkedés" elnevezéseket a legkevésbé is jogosnak érezhessük?

Először: akármelyik két, különböző „egyenesnek" egy és csakis egy közös „pontja" lehet — azaz, a táblázatunk akármelyik két különböző e eleme fölötti, p elemekből álló oszlopának egy és csakis egy közös p eleme lehet. Például: az e_0 és e_6 „egyenesek" oszlopainak közös eleme a p_1 „pont"; az e_4 és e_5 „egyenesek" oszlopainak közös eleme a p_3 „pont" stb.

Másodszor: akármelyik két különböző „pont" egy és csakis egy közös „egyenesre" „illeszkedhet" — azaz, a táblázatunk akármelyik két különböző p eleme egy és csakis egy e elem fölötti oszlopban szerepelhet *együtt*. Például: a p_1 és p_2 „pontok" az e_6 „egyenes" fölötti oszlopban, vagy a p_0 és p_4 „pontok" az e_3 „egyenes" fölötti oszlopban szerepelnek együtt. (Félreértés ne essék: *külön-külön* több oszlopban is előfordulnak!)

25. Ilyen módon akármelyik két különböző „pont" meghatároz egy „egyenest", és akármelyik két különböző „egyenes" meghatároz egy „pontot".

DE! A mi geometriánk nem külön pontokkal és egyenesekkel dolgozott, hanem *egyféle* „alapidomokra" épült. Hogyan tudnánk ilyen alapidomokat értelmezni ebben a modellünkben?

Vegyük például, a p_0 és p_2 „pontokat":

ezek az e_1 „egyenes" oszlopában szerepelnek együtt. Vegyük most az *ugyanilyen indexű* e_0 és e_2 „egyeneseket": a fölöttük álló oszlopok közös „pontja" p_1 lesz. Azt tapasztaljuk tehát, hogy ha a 0,2 indexekhez tartozó p_0 és p_2 „pontokból" meghatározzuk az 1 indexű e_1 „egyenest", — akkor az ugyanezekhez a 0,2 indexekhez tartozó e_0, e_2 „egyenesekből" az 1 indexű p_1 „ponthoz" jutunk.

Ez az egybeesés a táblázat tetszőleges két különböző „pontjára", illetve „egyenesére" teljesül. Ellenőrizzük ezt még egy konkrét példán: Vegyük a 3 és 6 indexeket, és gondoljuk őket „pontoknak": akkor a p_3 és p_6 „pontok" a 4 indexű e_4 „egyenest" határozzák meg. Most gondoljuk ugyanezt a két indexet, 3-at és 6-ot „egyeneseknek": akkor az e_3 és e_6 „egyenesek" a 4 indexű p_4 „pontot" határozzák meg.

Mindezek alapján a következőképpen alakítjuk át a **23.** pont táblázatát: Elhagyjuk a *p* „pont" és *e* „egyenes" különbségtételt: ezek helyett összesen hét különböző elemet veszünk, amiket a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokkal nevezünk meg. A **23.** pont táblázatából pedig csak az indexek maradnak:

0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
3	4	5	6	0	1	2
0	6	5	4	3	2	1

Ezt a táblázatot a projektív sík *illeszkedéstáblájának* nevezzük.

26. Ha igaz az, hogy az illeszkedéstábla is meghatároz egy projektív síkot, — akkor hogyan értelmezhetjük az illeszkedéstábla alapján a projektív sík bináris műveletét?

Ha a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemek közül kiválasztunk kettőt, *a*-t és *b*-t, akkor az $a \sim b$ művelet eredményét kétféle módszerrel is meghatározhatjuk az illeszkedéstábla segítségével:

Első módszer: Vesszük az *a*, *b* elemeket, és megkeressük azt az egyetlen oszlopot, amiben ez a két elem *együtt* szerepel: az oszlop alá írt elem lesz az $a \sim b$ művelet eredménye.

Második módszer: Vesszük az *a*, *b* elemeket; megkeressük azt a két oszlopot, ami alatt az *a* elem, illetve a *b* elem szerepel: ennek a két oszlopnak az egyetlen közös eleme lesz az $a \sim b$ művelet eredménye.

Ennek a definíciónak persze csak akkor van értelme, ha a kétféle módszer mindig ugyanarra az eredményre vezet. Vegyük például a 0 és 5 elemeket. Ha a művelet eredményét az első módszerrel határozzuk meg, akkor az illeszkedéstáblázatból a következőket emeljük ki:

				5		
				0		
				3		

A második módszerrel pedig:

		3				
3						
0		5				

Látjuk, hogy a kétféle módszer ugyanarra a $0 \sim 5 = 3$ eredményre vezet. Ha az illeszkedéstábla alapján a teljes művelettáblát kitöltjük, akkor éppen a 15. pont hételemes síkját kapjuk.

27. Másik példa.

Adott a következő illeszkedéstábla:

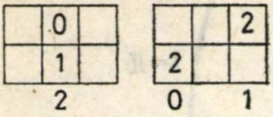
1	0	2
2	1	0
0	2	1

Milyen művelettábla tartozik ehhez az illeszkedéstáblához?

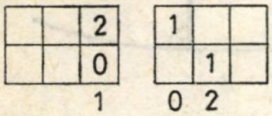
Mivel az illeszkedéstábla három különböző elemet tartalmaz, ezért a művelettábla is három elemből áll:

	0	1	2
0	–		
1		–	
2			–

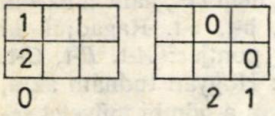
Meghatározzuk a $0 \sim 1$, $0 \sim 2$, $1 \sim 2$ kifejezések eredményét — kétféle módszerrel:



$0 \sim 1 = 2$



$0 \sim 2 = 1$



$1 \sim 2 = 0$

Ezek szerint: a teljes művelettábla:

	0	1	2
0	–	2	1
1	2	–	0
2	1	0	–

Tehát: akármelyik két elem „összeművelésének" eredménye a harmadik elem. Megint a **15.** pont három-elemű síkjával van dolgunk — csak a jelölések mások!

28. Még egy példa.
A sík illeszkedéstáblája:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0
4	5	6	7	8	9	10	11	12	0	1	2	3
6	7	8	9	10	11	12	0	1	2	3	4	5
0	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

A megfelelő művelettábla első sora:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	–	0	4	1	0	1	0	6	6	4	4	6	1

29. Hogyan mutatják ezek az illeszkedéstáblák a projektív síkok alaptulajdonságait?

Az I. „$\mathbf{a} \sim \mathbf{a}$ értelmezetlen" tulajdonság azért teljesül, mert a 26. pont módszereit *egyetlen* elem önmagával képzett műveletének meghatározására nem használhatjuk.

A II. „$\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{b} \sim \mathbf{a}$" tulajdonság abból következik, hogy sem az első, sem a második módszernél nem számít a két, megadott elem sorrendje: az eredmény **a**, **b**-re ugyanaz, mint **b**, **a**-ra.

A III. „$(\mathbf{a} \sim \mathbf{b}) \sim (\mathbf{a} \sim \mathbf{c}) = \mathbf{a}$" tulajdonság ellenőrzése már nem ilyen egyszerű! Először is: az **a**, **b**, **c** elemek között *egyenlők* nem lehetnek, mert: Ha $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, akkor $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{a} \sim \mathbf{a}$ értelmezetlen; ha $\mathbf{a} = \mathbf{c}$, akkor $\mathbf{a} \sim \mathbf{c} = \mathbf{a} \sim \mathbf{a}$ értelmezetlen; ha ped g $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, akkor $(\mathbf{a} \sim \mathbf{b}) \sim (\mathbf{a} \sim \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \sim \mathbf{b}) \sim (\mathbf{a} \sim \mathbf{b})$ értelmezetlen. De még ez sem elég: $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{a} \sim \mathbf{c}$ sem teljesülhet, mert akkor $(\mathbf{a} \sim \mathbf{b}) \sim (\mathbf{a} \sim \mathbf{c})$ lesz értelmezetlen! Vegyük például a **28.** pont illeszkedéstáblájának 0, 2, 9 elemeit: ezek mind mások ugyan, de $0 \sim 2 = 4$ és $0 \sim 9 = 4$; tehát: $(0 \sim 2) \sim (0 \sim 9) = 4 \sim 4$ értelmezetlen. A III. tulajdonság csak olyan **a**, **b**, **c** elem-hármasokra értelmezhető, amik nem tartalmaznak azonos elemeket, és amikre ezen kívül, még az $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \neq \mathbf{a} \sim \mathbf{c}$ egyenlőtlenség is teljesül. Ilyen elem-hármas például a 28. pont síkján a 0, 2, 8; mert itt az elemek mind mások, és mert $0 \sim 2 = 4 \neq 0 \sim 8 = 6$. Most már kipróbálhatjuk a III. tulajdonság teljesülését erre az esetre:

$$(0 \sim 2) \sim (0 \sim 8) = 4 \sim 6 = 0.$$

Végül a IV. tulajdonság: Ha **a**, **b**, **c** mind mások, és ha $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{a} \sim \mathbf{c}$, akkor

$a \sim b = a \sim c = b \sim c$ is igaz — ez hogyan derül ki az illeszkedéstáblából? Tegyük fel, hogy $a \sim b = a \sim c$; ez a **26.** pont első módszere szerint annyit jelent, hogy az **a** és **b** elemek ugyanabban az oszlopban szerepelnek együtt, mint az **a** és **c** elemek. Ebből viszont következik, hogy a **b** elem és a **c** elem feltétlenül szerepelnek ebben az oszlopban, — tehát megint a 26. pont első módszere szerint, **b** és **c** *csak* ebben az oszlopban szerepelhetnek együtt. Márpedig a IV. tulajdonság éppen ezt követeli! Például: a **28.** pont síkján a 0 és 3 elemek az 1 oszlopban szerepelnek együtt — a 0 és 5 elemek is ugyanebben az 1 oszlopban szerepelnek együtt — de akkor 3 és 5 csakis ebben az 1 oszlopban kell, hogy együtt szerepeljenek!

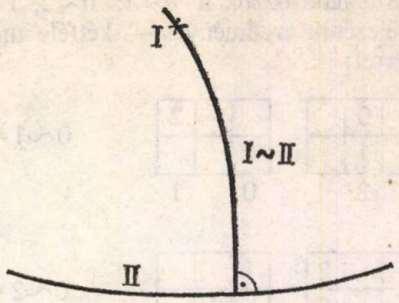
30. Gondoljuk most át mégegyszer: mit is tapasztaltunk?

Gömbi geometriával indultunk: kiválasztottunk bizonyos tulajdonságokat, amiket alaptulajdonságoknak neveztünk ki; és megpróbáltunk olyan, másféle — tehát nem a gömb geometriájára épülő — modelleket keresni, amikben ezek az „alaptulajdonságok" szintén teljesülnek. Ilyen modelleknek bizonyultak a **15.** pont háromelemű és hételemű síkjai, vagy a 28. pont tizenhárom elemű síkja.

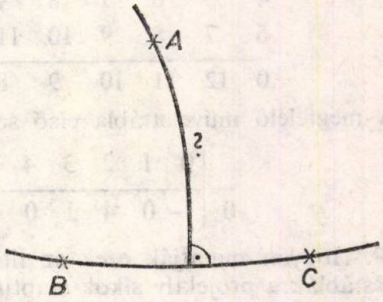
Tudjuk azonban, hogy a gömbi geometria mérhetetlenül gazdagabb ennél a néhány „alaptulajdonságnál". Kérdezem akkor: vannak-e a gömbi geometriának olyan, másféle fogalmai, tételei, tulajdonságai, amiket felhasználhatnánk, kipróbálhatnánk ezeken a véges síkokon is? Lehet-e ugyanaz az állítás igaz a gömbön, de hamis valamelyik véges modellen? És megfordítva: ami tilos a gömbön, — tilos marad-e a többi projektív síkon is?

32. Induljunk el a következő úton.

Láttuk a **16.** pontban, hogy a gömbi művelet egyik lehetséges geometriai képe, ábrázolása az egyik alapidom egyik pontjából a másik alapidom egyenlítői főkörére húzott merőleges:



Vegyünk most nem két, hanem három alapidomot, **a**-t, **b**-t, **c**-t. Ragadjuk ki ezeknek egy-egy pontját: *A*-t, *B*-t, *C*-t. Kérdezem most: Hogyan tudnám az **a**, **b**, **c** alapidomok és a gömbi művelet segítségével kifejezni az *A* pontból a *BC* főkörre húzott merőlegest?

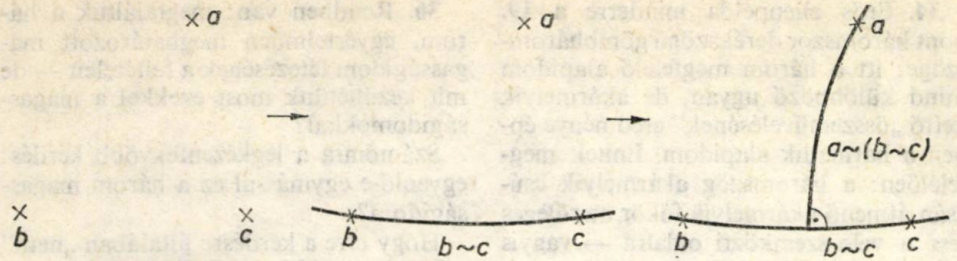


Először is: a *B* és *C* pontokon átmenő főkör, „alapidom-szemmel" nézve, a **b** és **c** alapidomok „összeművelésével" kapott $b \sim c$ alapidom egyenlítői főköre. Vagyis: a *BC* főkör, alapidomokkal kifejezve, $b \sim c$-vel azonos.

Másodszor: Ha most erre a *BC* főkörre az *A* pontból merőlegest húzok, akkor „alapidom-szemmel" nézve „összeművelem" a $b \sim c$ alapidomot az **a** alapidommal: vagyis az $a \sim (b \sim c)$ alapidomot állítom elő.

Mindezt összefoglalva:

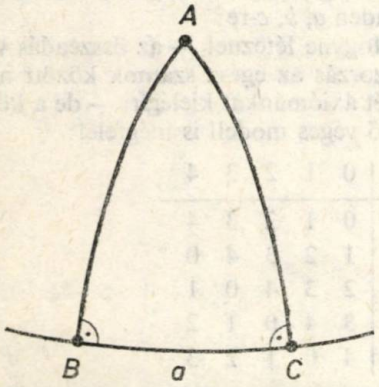
Ha az **a**, **b**, **c** alapidomokból kiragadjuk az *A*, *B*, *C* pontokat, akkor az *A* csúcsból a *BC* oldalra húzott merőleges az $a \sim (b \sim c)$ alapidom egyenlítői főköre lesz:



32. Milyen feltételeket kell az **a**, **b**, **c** alapidomoknak kielégíteniük, hogy az **a∼(b∼c)** kifejezés egyértelműen meghatározott legyen?

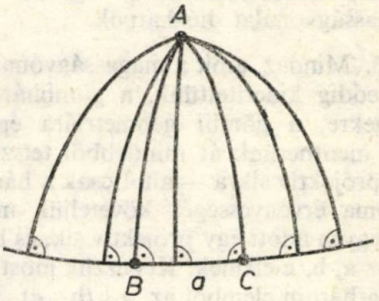
A gömbi művelet csak akkor értelmezetlen, ha a két összeművelendő elem azonos. Ezért az **a∼(b∼c)** kifejezésben **b** és **c** nem lehetnek egymással egyenlők, mert akkor a kifejezésben szereplő **b∼c=b∼b** értelmezetlen lenne. De ez még nem elég: **a** sem lehet egyenlő **b∼c**-vel, mert akkor az **a∼(b∼c)** kifejezés lenne értelmezetlen!

Ennek az utolsó feltételnek egyik lehetséges geometriai ábrázolása a következő: Ha az *ABC* háromszögben az *A* csúcs éppen a *BC* oldalnak, mint egyenlítői főkörnek a sarkpontja:



akkor ebben az *ABC* háromszögben az *A* csúcson átmenő *akármelyik* főkör merőleges lesz a *BC* oldalra:

Tehát: ebben az *ABC* háromszögben az *A* csúcsból a *BC* oldara *nemcsak egy* merőlegest húzhatunk, — vagyis, „alapidom-nyelven" szólva, az **a∼(b∼c)** kifejezés nem lesz egyértelműen meghatározott.



33. Mindezt a következőképpen is megfogalmazhatjuk: Az *ABC* gömbháromszögben az *A* csúcsból a *BC* oldalra bocsátott magasságvonal akkor lesz egyértelműen meghatározott, ha az **a∼(b∼c)** kifejezés értelmezhető, vagyis ha a **b≠c** és **a≠b∼c** feltételek egyszerre teljesülnek.

És az *ABC* háromszög másik két magasságvonala?

Ugyanaz a gondolatmenet, ami elvezetett az egyik magasságvonal **a∼(b∼c)** alakú kifejezéséhez — a másik két magasságvonalra a **b∼(a∼c)**, illetve a **c∼(a∼b)** kifejezéseket adja. Az egyértelműség feltételeihez is ugyanúgy juthatunk: **a≠c**-nek és **b≠a∼c**-nek, illetve **a≠b**-nek és **c≠a∼b**-nek kell teljesülnie.

Összefoglalva ezeket az eredményeket:

Ahhoz, hogy az *ABC* háromszögnek mind a három magasságvonala egyértelműen meghatározott legyen, a megfelelő **a**, **b**, **c** alapidomoknak a következő feltételeket kell kielégíteniük:

Egyrészt mind a három alapidom különböző legyen, — másrészt semelyik kettő „összeművelésének" eredménye ne legyen a *harmadik* alapidom!

34. Erős ellenpélda minderre a **19.** pont háromszor derékszögű gömbháromszöge: itt a három megfelelő alapidom mind különböző ugyan, de akármelyik kettő „összeművelésének" eredménye éppen a harmadik alapidom. Ennek megfelelően: a háromszög akármelyik csúcsán átmenő akármelyik főkör merőleges lesz a vele szemközti oldalra — vagyis mind a három csúcson át végtelen sok magasságvonalat húzhatunk.

35. Mindaz, amit a magasságvonalakról eddig kiderítettünk, a gömbháromszögekre, a gömbi geometriára épült. Mit menthetünk át mindebből tetszőleges projektív síkra — ahol csak a három axióma érvényességét követeljük meg?

Legyen adott egy projektív sík, és benne az **a**, **b**, **c** elemek. Képezzük most ebből a három elemből az $\mathbf{a}\sim(\mathbf{b}\sim\mathbf{c})$, $\mathbf{b}\sim(\mathbf{a}\sim\mathbf{c})$, $\mathbf{c}\sim(\mathbf{a}\sim\mathbf{b})$ kifejezéseket, amiket az **a**, **b**, **c** háromidomhoz tartozó *magasságidomoknak* fogunk nevezni. Ahhoz, hogy ez a három magasságidom egyértelműen meghatározott legyen, a 33. pont feltételeinek kell teljesülniök: tehát az **a**, **b**, **c** elemeknek mind különbözniök kell egymástól, — és semelyik kettő összeművelése nem eredményezheti a *harmadik* elemet.

Vegyük például a **28.** pont síkjának 1, 4, 8 elemeit: teljesítik-e a feltételeinket? Mind a hárman különböznek egymástól, — ami pedig az összeműveléseket illeti:

$$1\sim4=0,$$

$$1\sim8=5,$$

$$4\sim8=9,$$

tehát: semelyik kettő művelete nem eredményezi a harmadik elemet. Ezek szerint az 1, 4, 8 háromidom magasságidomai egyértelműen meghatározottak:

$$1\sim(4\sim8)=1\sim9=5,$$

$$4\sim(1-8)=4\sim5=9,$$

$$8\sim(1\sim4)=8\sim0=6.$$

36. Rendben van: megtaláltuk a három, egyértelműen meghatározott magasságidom létezésének a feltételeit — de mit kezdhetünk most ezekkel a magasságidomokkal?

Számomra a legkézenfekvőbb kérdés: egyenlő-e egymással ez a három magasságidom?

Hogy erre a kérdésre általában „nem" a felelet, azt a 35. pont példája is mutatja: hiszen itt a három magasságidom rendre 5, 9, 6, tehát mind mások. De ugyanezt tanúsítja a gömb is: ha a három magasságidom minden gömbháromszögben egyenlő volna, akkor a három magasságvonal mindig *egyugyanarra* a főkörre esne — ami persze nem igaz. Ez a próbálkozás tehát nem sikerült!

37. Engedjünk újra a kísértésnek: létezhet-e egyáltalán olyan bináris művelet, ahol az ilyen módon képzett elemek *mindig* egyenlők egymással?

Fogalmazzuk meg így a kérdésünket: Létezik-e olyan halmaz, benne egy „□" jelű bináris művelettel, amire a következő axiómák teljesülnek:

I**) $\mathbf{a}\square\mathbf{b}=\mathbf{b}\square\mathbf{a}$;

II**) $a\square(b\square c)=b\square(a\square c)=c\square(a\square b)$

minden a, b, c-re?

Hogyne létezne! — az összeadás vagy a szorzás az egész számok között mind a két axiómánkat kielégíti — de a következő véges modell is megfelel:

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

(Kiskapu — a csoportelmélet felé!)

38. A három magasságidom tehát általában különbözik egymástól — ahogy ezt a gömbháromszög magasságvonalai is mutatják.

Nincs hát a három magasságvonalnak semmilyen különleges, figyelemre méltó tulajdonsága? Azt tapasztaljuk, hogy ez a három magasságvonal mindig egyetlen

gömbi pontra: a gömbháromszög úgynevezett *magasságpontjára* illeszkedik. Hogyan tudnám ezt a geometriai tényt a gömbi művelet nyelvére átfogalmazni?

Jelöljön **a**, **b**, **c** olyan gömbi háromidomot, ami kielégíti a 33. pont feltételeit és ezért az $a \sim (b \sim c)$, $b \sim (a \sim c)$, $c \sim (a \sim b)$ magasságidomok mindhárman egyértelműen meghatározottak. Mit jelent most az, hogy a három magasságidom egyenlítői főkörei, vagyis a három magasságvonal egyugyanarra a pontra: a magasságpontra illeszkedik? „Pontvonal" nyelven azt jelenti, hogy akármelyik két magasságvonalat „művelem" is össze, az eredményül kapott pont mind a három lehetséges esetben ugyanaz lesz: a magasságpont. „Alapidom-nyelvre" lefordítva mindezt: akármelyik két magasságidomot művelem is össze, az eredményül kapott idom mind a három lehetséges esetben ugyanaz lesz — nevezzük ezt az idomot az **a**, **b**, **c** háromidom *magasság-centrumának*.

Ha a gömbháromszög magasságvonalai egyértelműen meghatározottak, akkor a három magasságvonal mindig *egy* pontra: a magasságpontra illeszkedik. „Alapidom-nyelven" ezt a következőképpen fogalmazhatom meg: Minden olyan **a**, **b**, **c** gömbi háromidomhoz, aminek a három magasságidoma egyértelműen meghatározott, tartozik egy, ugyancsak egyértelműen meghatározott magasság-centrum, amit akármelyik két magasságidom összeművelésével állíthatok elő.

39. Hogyan vinetjük át a magasságcentrum fogalmát tetszőleges projektív síkra?

Legyen adott egy projektív sík, és benne az **a**, **b**, **c** elemek. Tegyük fel, hogy erre a három elemre teljesülnek a 33. pont feltételei, és ezért a megfelelő $a \sim (b \sim c)$, $b \sim (a \sim c)$, $c \sim (a \sim b)$ magasságidomok egyértelműen meghatározottak. Képezzük most a három magasságidom három lehetséges műveletét:

$$[a \sim (b \sim c)] \sim [b \sim (a \sim c)],$$

$$[a \sim (b \sim c)] \sim [c \sim (a \sim b)],$$

$$[b \sim (a \sim c)] \sim [c \sim (a \sim b)].$$

Ha ez a három kifejezés *ugyanazt* az elemet eredményezi, akkor ez az elem lesz az **a**, **b**, **c** háromidom magasság-centruma.

Kérdés csak az, hogy — *ugyanazt* eredményezi-e?

40. Vegyük a következő, huszonegy elemes síkot, amit illeszkedéstáblájával adunk meg:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0	1	2	3
14	15	16	17	18	19	20	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
16	17	18	19	20	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Keressünk most három olyan elemet, ami megfelel a 33. pont követelményeinek. Például az 1, 4, 7 elemek egyrészt mind mások, — másrészt pedig:

$$1 \sim 4 = 0,$$
$$1 \sim 7 = 15,$$
$$4 \sim 7 = 18,$$

tehát a magasságidomok egyértelműen meghatározottak:

$$7 \sim (1 \sim 4) = 7 \sim 0 = 14,$$
$$4 \sim (1 \sim 7) = 4 \sim 15 = 10,$$
$$1 \sim (4 \sim 7) = 1 \sim 18 = 3.$$

Műveljük most össze egymással a három magasságidomot — mind a három lehetséges módon:

$$[7 \sim (1 \sim 4)] \sim [4 \sim (1 \sim 7)] = 14 \sim 10 = 11,$$
$$[7 \sim (1 \sim 4)] \sim [1 \sim (4 \sim 7)] = 14 \sim 3 = 11,$$
$$[4 \sim (1 \sim 7)] \sim [1 \sim (4 \sim 7)] = 10 \sim 3 = 11$$

— *ugyanaz* az eredmény! Ennek a háromidomnak tehát *van* magasság-centruma: a 11 nevű elem.

Ha ennek a síknak akármelyik másik olyan háromidomából indulunk ki, ami megfelel a 33. pont feltételeinek, akkor ugyanezt tapasztalhatjuk: itt is, ugyanúgy, mint a gömbön, minden megfelelő háromidomnak *lesz* magasság-centruma.

DE!

41. Tekintsük a következő, ugyancsak huszonegy elemes projektív síkot:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0	1	2	3
14	15	16	17	18	19	20	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
16	17	18	19	20	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	3	2	17	10	14	20	16	15	18	5	12	11	19	9	8	7	4	13	6	1

Ugyanúgy, mint előbb: keressünk itt is három olyan elemet, ami megfelel a 33. pont követelményeinek. Például az 5, 6, 7 elemek egyrészt mind mások, — másrészt pedig:

$$5 \sim 6 = 14,$$
$$5 \sim 7 = 11,$$
$$6 \sim 7 = 20,$$

tehát a magasságidomok egyértelműen meghatározottak:

$$7 \sim (5 \sim 6) = 7 \sim 14 = 9,$$
$$6 \sim (5 \sim 7) = 6 \sim 11 = 12,$$
$$5 \sim (6 \sim 7) = 5 \sim 20 = 10.$$

Műveljük most össze egymással a három magasságidomot — mind a három lehetséges módon:

$$[7 \sim (5 \sim 6)] \sim [6 \sim (5 \sim 7)] = 9 \sim 12 \equiv 15,$$
$$[7 \sim (5 \sim 6)] \sim [5 \sim (6 \sim 7)] = 9 \sim 10 = 18,$$
$$[6 \sim (5 \sim 7)] \sim [5 \sim (6 \sim 7)] = 12 \sim 10 = 4$$

— ezek mind mások! Ennek a háromidomnak tehát NINCS magasság-centruma!

42. Mire következtethetünk ebből?

A gömbön is, a **40.** pont síkján is tapasztaltuk, hogy: Ha egy háromidom magasságidomai egyértelműen meghatározottak, akkor ehhez a háromidomhoz egy, ugyancsak egyértelműen meghatározott magasság-centrum tartozik.

A **41.** pont síkja azonban rendhagyónak, szabálytalannak bizonyult: olyan háromidomra bukkantunk benne, aminek egyértelműen meghatározott magasságidomai voltak ugyan, de nem volt magasság-centruma.

Ebből először is arra következtethetünk, hogy a **41.** pont projektív síkja *más szerkezetű,* mint a gömbi alapidomok vagy a **40.** pont síkja: ellentmondhat olyan szabályszerűségnek, aminek a másik két sík feltétlenül engedelmeskedik.

Másodszor:

Minden eddigi projektív síkunk teljesítette három követelményünket, amiket axiómáknak neveztünk. Ebből a három alaptulajdonságból bizonyos további tulajdonságokat már le tudtunk vezetni — például a **15.** pont IV. tulajdonságát. Ezzel szemben: találtunk olyan projektív síkokat, ahol a magasságidomok egyértelműségéből már következett a magasságcentrum létezése is, — és találtunk olyan projektív síkot is, ahol ez nem volt igaz. Ebből arra kell következtetnünk, hogy a magasság-centrum létezését vagy nem-létezését *nem tudjuk* a projektív síkot meghatározó három axiómából levezetni: ez a tulajdonság *független* a három alaptulajdonságtól!

43. Mit jelent pontosan az a kifejezés, hogy két projektív sík szerkezete különbözik egymástól? Ehhez először az „azonos szerkezet" fogalmát kellene tisztázni. Vegyük tehát — — —

DR. VARGA TAMÁS
ny. főmunkatárs
Budapest

Megjegyzések Fonódi Gyula cikkéhez

Öröm a tanárnak, ha napfényre kerülnek az osztályban a félreértések, a homályos pontok, hiszen ez ad alkalmat a tisztázódásukra, nem az, ha visszahallja a saját szavait.

Valahogy így olvastam Fonódi Gyula cikkét is, megjelölve benne mindjárt azt, ami tisztázásra szorul.

Vannak ezek között egyszerű ténybeli tévedések, pontatlanságok. Vannak olyan általánosítások, amelyeket talán nem is egészen úgy gondol, ahogy az írás hevében papírra vetette. Vannak aztán súlyos elvi kérdések is, amelyeket ebben a terjedelemben nem is lehetne tisztázni (egyikünk részéről sem), és amelyeknek a tisztázását részben a jövőre kell bíznunk.

Kezdem egy, a cikktől független személyes emlékemmel, amely azonban számomra mindennél világosabban mutatja, milyen lassan érnek be a pedagógiai vetések. Nevezzük így: a romboid-ügy.

Kezdetben volt ugye a négyzet, a téglalap, a rombusz és a romboid, négy egymást kizáró négyszögfajta, közös néven a paralelogrammák. A többesszám is jelzi, hogy ez az utóbbi: gyűjtőnév. A többi nem az.

Az ötvenes évek elejétől kezdve megszűnt a paralelogrammáknak ez a különleges státusa. A halmaz-szemlélet térhódításának egyik első jele volt ez, megírtam már máskor, hogy miért, nem ismétlem. Az egyenlő oldalú paralelogrammák lettek a rombuszok (akkor is, ha egyenlő szögűek és így derékszögűek), az egyenlő szögűek lettek a téglalapok (akár egyenlők az oldalaik, akár nem), a „romboid" elnevezés pedig szükségtelenné vált, mert ebben a rendszerben a különbséghalmazok elemei egyébként sem kaptak külön nevet.

Kimaradt a romboid a tantervekből, a tankönyvekből, de megmaradt az emberek tudatában, és továbbra is követelte a maga jussát. A hatvanas évek közepe vagy talán vége felé lehetett — itt következik a személyes emlék —, hogy hallottam egy felszólalást valakitől, aki magas szinten volt felelős az általános iskolai matematikatanításért. A gyakorlatra apellált, pedagógusok általános véleményeként nehezményezte azt a „zavaros" helyzetet, amely azzal állt elő, hogy a *paralelogramma* szót kétféle értelemben használjuk: egyrészt eredeti értelmében, másrészt *romboid* helyett is. Azt mondjuk a gyereknek, hogy rajzoljon paralelogrammát, de azt várjuk tőle, hogy romboidot rajzoljon. Pedig ezt az utasítást akkor is teljesítené a gyerek, ha téglalapot, rombuszt vagy négyzetet rajzolna. (Na igen, de a paralelogrammára jellemző tulajdonságokon kívül olyanokat is feltételezne, amelyekkel nem minden paralelogramma rendelkezik.)

Eltelt két évtized, és ezen ma már csak nevetünk. Az a diák jut az eszünkbe, aki a négyzeten bizonyítja be, hogy a négyszög szögeinek összege 360°, hiszen a négyzet is négyszög.

Ne felejtsük azonban el, hogy az új tanterv sokkal több — részben az előbbihez hasonló, részben egészen más jellegű — következetlenséget küszöbölt ki, tartalmi és módszertani téren is sokkal több új elemet tartalmaz, semhogy tíz-tizenöt év elegendő lenne ezeknek az általános elfogadására.

Ám a romboid-ügy nemcsak azt példázza, hogy a pedagógiában a vetések *lassan* érnek be. Azt is példázza, hogy előbb-utóbb mégiscsak *beérnek*.

A hibákat persze ki kell küszöbölni, csak úgy léphetünk előre. Sajnos, Fonódi Gyula cikkében összemosódnak valóságos hibák olyasmikkel, amik egyáltalán nem hibák, csak ő véli annak.

Lássunk először néhány ténybeli tévedést és félreértést!

Csak apró pontatlanság (nem is vélt vagy valódi hibákra vonatkozik), mégis ki kell igazítani: az Oktatási Miniszter 114 (1977) M. K. 11/OM rendelete nem a komplex matematikatanítás „Szendreiféle változatát" vezette be. Ilyen változat nem volt. Szendrei János egy olyan pártatlan és független bizottságnak volt a vezetője, amely körültekintően értékelte az akkor Magyarországon folyó matematikatanítási kísérleteket, és amelynek a véleménye alapján az OPI kapott megbízást egy új tanterv kidolgozására, alapul véve a komplex matematikatanítási kísérletet.

Nehezményezi a szerző, hogy a tantervet előkészítő „kísérletek nem elégítették ki a tudományos kutatás kívánalmait" (amelyeket részletesen felsorol). Ezek a kívánalmak valóban érvényesek a szó szigorú értelmében vett kísérletekre, az *experiment*-ekre. Van azonban a „kísérlet" szónak egy más értelme is. Jobb szó híján így nevezzük magyarul a *project*-eket. A komplex matematikatanítási kísérlet ilyen project volt: egy kicsit tantervfejlesztés, egy kicsit továbbképzés (főként a Kapcsolat c. kiadványon keresztül), sőt az önkéntes bekapcsolódás révén egy kis mozgalom jellege is volt. Nem jogos számon kérni tőle azt, ami nem volt, és nem is akart lenni.

Ennek ellenére hiba lett volna mellőzni a folyamatos *eredménymméréseket*. A szerző úgy tudja, hogy a kísérleti időszakban ilyenek nem voltak. Rosszul tudja. A kísérleti osztályokban folyton mérték a tanítás eredményességét. Egyebek közt ezek a mérések adtak alapot a kísérleti tanterv továbbfejlesztéséhez. Nagy populáción végzett, statisztikailag értékelhető eredménymérésre természetesen csak akkor kerülhetett sor, amikor ennek a feltételei már adva voltak: egyrészt a nagy populáció, másrészt a fejlesztés alatt álló tanterv megállapodása, a feltételeknek egy bizonyos rögzítése.

Az viszont igaz, hogy az új tanterv bevezetése elsietett volt. Ennek csak egyik részjelensége az, hogy — mint a szerző említi — például az 5. és a 6. osztályos matematika-tankönyvek kipróbálása nem történt meg. Nem is csak ezé a kettőé, és nem is csak szűkkörű (vagy kevésbé szűkkörű) kipróbálásuk maradt el, hanem a megírásukra is nagyon rövid idő jutott. Egyáltalán, egy ennyire új jellegű tanterv bevezetésére érdemes lett volna több időt szánni. Sőt ma már látjuk, hogy a kötelező bevezetés helyett az elterjesztés lett volna a jobb stratégia. Az önkéntes bekapcsolódás révén a komplex matematikatanítási kísérletben részt vevő osztályok száma egy évtizeden át nagyjából a mértani sorozat törvénye szerint (vagyis exponenciálisan) nőtt. Ez a természetes növekedés menete mindaddig, amíg a telítettség nem közeledik; ez felel meg annak, hogy a bekapcsolódó osztályok száma évről évre arányos a már bekapcsolódott osztályok (a „fertőző gócok") számával. Hiába volt fokozatos a tanterv bevezetése is, az önkéntességet nem lehetett biztosítani. Csak *beterelléssel* volt kitölthető az a bizonyos 7,5% is, ahol 1974-ben elkezdődött az új tanterv szerinti tanítás. Ez ugyanis kb. négy-ötszöröse volt az olyan első osztályok számának, ahol komplex matematika-tanítási kísérlet folyt az előző tanévben. A szervezett továbbképzés nem tudott lépést tartani a bevezetés ütemével, az önkéntességet pedig semmiképpen sem tudta pótolni. Így vált a meggyőződésük ellenére bekapcsolódni kényszerült pedagógusok egy része az új tantervnek nem propagandistájává, hanem ellenpropagandistájává.

Újabb felmérések arra engednek következtetni, hogy az új tanterv még ma is csak az osztályok kisebb részében tekinthető megvalósultnak. Nem a „jobb gyerekanyaggal rendelkező" iskolákban, hanem ott, ahol a pedagógus a tanterv módszertani irányelveit is komolyan veszi. Ez a kisebbség a biztosítéka annak, hogy a tanterv a kötelező bevezetés *ellenére is* országosan megvalósul majd. A tantervi korrekció célja pedig az, hogy ezt a folyamatot megkönnyítse.

Ez után a kitérő után folytatom a cikkre vonatkozó megjegyzéseimet.

Cikkének abban a részében, ahol a szerző a legsúlyosabb megállapításokat teszi (erre még visszatérek), úgy mellékesen a „nálunk is bevezetett Dienes-módszerről" ír. Vajon hogy érti ezt? Talán csak nem úgy, hogy mi az általános iskolai tantervvel a Dienes-módszert vezettük be? Abból, ahogy a Dienes-módszert érintő kritikát az új magyar tantervre vonatkoztatja, arra lehet következtetni, hogy nem áll távol tőle ez a nézet.

Sokan vagyunk hálásak Magyarországon (ahogy sokan vannak sok más országban is hálásak) azért, amit Dienes Zoltántól tanultunk. De hogy kritikátlanul elfogadnánk — vagy éppenséggel bevezetnénk — akár a módszerét, akár a tantervét, azt csak az egészen tájékozatlanok hihetik. A tévében mostanában vetített „Dienes professzor kísérletei" című sorozat remélhetőleg segíti eloszlatni az ekörüli félreértéseket.

Nincs itt hely leírni, hogy mit tanultunk tőle, mit másoktól (és mások is tőlünk). A kritikátlan átvételt, az adaptálás hiányát könnyű felismerni. Nem hiszem, hogy ezzel a váddal jogosan illethetnének minket.

Vegyük például a színes rudakat! Ezeket Caleb Gattegno terjesztette el világszerte egy egyszerű belga tanító, Cuisenaire nyomán. Dienes Zoltánnál nem szerepelnek. Gattegno olyan elméletet szőtt köréjük, olyan használati módjaikat is javasolja, amelyeket mi nem tudunk elfogadni. Sokszorosan kipróbáltuk viszont, a módszertani kézikönyvekben is leírtuk, mi az, amire valóban kitűnően használhatók. Természetes, hogy ezt az eszközt is és más eszközöket is lehet roszszul használni. Például (mint a gyógyszereket) túladagolni, vagy olyankor használni, amikor éppen nincs szükség rájuk. A tanulók ebben a tekintetben (is) nagyon különböznek, ezt is figyelembe kell venni.

De szabad-e összekeverni a hibás használatot („Ezeknek az eszközöknek a túlzott használata" — olvassuk a cikkben) az ellenük emelt elvi kifogásokkal? Szabad-e ezekből azt a „tanulságot" levonni, hogy „a tanulást nem lehet helyettesíteni a játékkal" (persze, hogy nem, segíteni viszont igen, de ez egészen más kérdés). A kézikönyvekben, egyéb könyvekben és cikkekben mindezek a problémák tisztázva vannak; ha bármi is félreérthető bennük, jó lenne *arra* felhívni a szerzők figyelmét.

Ha mégis igaz, hogy „az általános iskolák matematikai szertáraiban, szekrényeiben nagy mennyiségben lapulnak meg felhasználatlanul a drága pénzen vásárolt taneszközök", akkor ennek más okai lehetnek. Különféle okai, közülük egyet krumpli-effektusnak neveznék. Amikor a krumpli Európába került, hosszú időn át igen vegyes volt a fogadtatása. Voltak, akik megették az egészségre ártalmas, föld fölötti termését; így terjedt el az a hír, hogy „a burgonya mérgező". Jó néhány évtized kellett ahhoz, hogy megbarátkozzanak vele, elterjedjenek a helyes felhasználási módjai, nélkülözhetetlen tömegélelmezési cikké váljon.

Azt hiszem, hogy ennek a történetnek vannak tanulságai a színes rudakra és más matematikai taneszközökre vonatkozóan is. Jó szolgálatot tesz az, aki felhívja a figyelmet a hibás használati módokra. Az is, aki terjeszti értelmes használati módjaikat, amelyeken keresztül segíthetik a konkrét tapasztalatszerzéstől az absztrakt gondolkodásig vezető folyamatot. De az nem tesz jó szolgálatot, aki a hibás használati módokra hivatkozva a helyes használat terjedését is gátló propagandát fejt ki. Lehet persze valakinek olyan véleménye is, hogy ezek az eszközök mindenestül károsak. De ezt a véleményt nem lehet olyan használati módokra hivatkozva képviselni, amelyek mindenki szerint hibásak.

Ahogy az eszközhasználatról szóló részben, úgy a felfedeztetéssel kapcsolatban is lehetetlen különválasztani a cikk-

nek a *hiányos megvalósulást* érintő mondanivalójától az *elvi kifogásokat*. Pedig nagy különbség van aközt, hogy valami *nem, vagy nem jól valósul meg* és hogy *nem jó, ha megvalósul*. Az irányított felfedeztetés például kiváló tanítási elv. Ki van ellene? Ki vonta valaha is kétségbe, hogy „nem szabad teljesen a tanulókra bízni az interiorizációs folyamatot"? Hacsak az a tanár nem, aki legszívesebben be sem megy az osztályba, csak beüzen, hogy vegyék elő a diákok ezt vagy azt az eszközt, játszanak vele, és „interiorizálják" a tapasztalataikat.

Nem tudom elhinni, hogy komolyan gondolja a szerző azt, amit „4. hiba" címszó alatt ír: „Az első osztálytól a nyolcadik osztályig a matematika mind a nyolc tudományterülete egyforma súllyal szerepel az egyes évfolyamok anyagában. Így a halmazok, a matematikai logika, aritmetika, algebra, geometria, valószínűségszámítás, kombinatorika, statisztika."

Előttem van a tanterv. Minden osztály anyagának felsorolása után itt látom az évi órakeret felosztását. A „Számtan, algebra" címszó után minden osztályban ez olvasható: „kb. 40%". A kombinatorika, valószínűség, statisztika három „tudományterületére" együtt általában negyedannyi jut, „kb. 10%". Halmazokra és logikára együtt ennek a fele, „kb. 5%". Sőt ha azt nézzük, hogy a különféle témakörökben mi sorolható a régi értelemben vett számtan körébe, kiderül, hogy a számtan, a számolás majdnem mindenütt jelen van, olyan formában, hogy abba az algebrai gondolatok is (például az egyenletmegoldás) egyre inkább beépülnek.

A matematika egységes, és a tanításnak csak javára válik, ha egy óra tárgya nem skatulyázható be egyértelműen egyetlen témakörbe, ha fény derül a témák közti kapcsolatokra. Ez valami egészen más, mint amit a szerző (nem tudom, milyen — nyilvánvalóan félreértett — forrás alapján) úgy ír le, hogy „egy-egy matematikaórán a matematika minden területével egyformán foglalkozni kell". Teljes az ellentmondás egy helyes elv és annak merőben hibás interpretálása között. Ha minden órán (de akár órákra elosztva is) egyformán foglalkozni kellene nyolc különálló területtel, amelyek közül az aritmetika csak egy, akkor jogos volna a következtetés: „Valószínűleg ez a hibás elv az oka annak, hogy a numerikus számolási készsége a tanulóknak az utóbbi években szinte visszafejlődött..." Ha azonban a számtan szinte mindenbe belejátszik — ami tény — akkor talán mégsem lehet ezt a tantervi szerkezetet hibáztatni azért, ha a számtan gyakorlására ennyire kevés idő jut.

Nem lehet itt is valami krumpli-effektus?

Elgondolkoztatott az „egyenlő súly". Erről itt olvastam először.

A legélesebb elmarasztalást „1. hiba" címszó alatt olvashatjuk, ugyanott, ahol „a nálunk is bevezetett Dienes-módszerről" is szó van.

Először csak ennyi: „Nem teljes igazság az, hogy a ‚régi' iskola csak számolási készséget követelt a tanulóktól, és receptszerű ismeretek nyújtása volt elsődlegesen a célja a tanításnak".

Ez bizony nemhogy nem a teljes igazság, de nagyon távol áll az igazságtól. Én magam 1948-tól kezdve Stéger Ferenc barátommal és másokkal együtt évtizedeken át közreműködtem a „régi iskola" tantervének, tankönyveinek, módszertani irodalmának kimunkálásában, és így saját személyemben is rossz néven vehetem — a cikkíróval együtt — az ilyen durván általánosító kijelentéseket. Csak tudnám, kitől vegyem rossz néven. Mint a régi iskola volt tanára azt is elmondhatom vele együtt: „Nem igaz, hogy csak receptek tanítására törekedtünk."

Sajnos a vád a továbbiakban az új tanterv készítői ellen fordul: „Ennek a minden régit tagadó nézetnek mi lett a következménye? Az, hogy ennek az igen fontos matematikai alapműveltségnek a

teljes elhagyása veszélybe sodorta az egész matematikai épületet."

Ez a „teljes elhagyás" is olyasmi, amit a cikk szerzője nem írt volna le, ha alaposabban meggondolja, mit jelent. Hiszen ha a megalapozó matematikai műveltség teljesen kimaradt az új tantervből, akkor mindaz, ami mégis benne maradt, értéktelen. Kritikának bizony ez elég súlyos. Szerencse, hogy megalapozatlan.

A matematika tanításának sok részletkérdéséről vannak a világban véleményeltérések és viták. Viszonylag kevés az, ami a különféle zsákutcák megjárása után egyértelműen helyesnek bizonyult. E közé a kevés közé tartozik (egyébként nem is csak a matematikában) a *fejlesztésközéppontúság* elve. A középpontban nem a matematika van, hanem a gyerek, az ő fejlődése, többek között matematikai képességeinek a fejlődése is. Ebből következik a *spirális tanterv* elve: az egységes matematika főbb gondolatkörei korán megjelennek, és mindig a gyerek életkorához, tevékenységrendszeréhez igazodva épülnek tovább. Van ahol ez bujtatva történik — a számtanban jól elférnek például a nem-geometriai témák — van ahol nyíltabban, de a tendencia ugyanaz. Ezzel együttjár a hagyományos tanítási anyag bizonyos elemeinek elhagyása vagy redukálása is. Nem könnyű feladat mérlegelni, mi fontosabb, mi kevésbé fontos, figyelembe véve a társadalom változó igényeit is. Az a megoldás, amit a jelenleg érvényes tanterv hozott, bírálható, sőt szüksége is van a bírálatra, hogy tovább lehessen fejleszteni. Aki azonban *minden régi tagadását* véli megvalósulni a tantervben, az láthatóan *semmit* sem fogad el belőle, ami előrevivő.

KINTLI LAJOS
gimnáziumi tanuló
Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg

A π meghatározása számítógéppel

A π a kör kerületének és átmérőjének az arányaként került be a matematikába. Értékének egyre pontosabb meghatározása izgalmas történet, amelyet részletesen ismertet [1] és [2]. Ebben a folyamatban különösen nagy előrelépést jelentett a számítógépek megjelenése. Az 1. táblázatban láthatók az érdekesebb eredmények, s ma már a π értékét több, mint 2 millió tizedesjegyre ismerjük [3].

Bár ezzel a fantasztikus eredménnyel nem kelhetünk versenyre, az iskolaszámítógéppel is megkísérelhetjük a π meghatározását. Az eddig megjelent próbálkozások azonban (l. pl. [4]-et!) meglehetősen lassan konvergáló módszereket ajánlottak, amelyeknek történeti érdekességükön túl nem volt más hasznuk. Az alábbiakban egy olyan módszert szeretnék ismertetni, amellyel akár több ezer tizedesjegyre is meghatározhatjuk a π-t.

Az 1. táblázatban felsorolt számítások legtöbbje az arc tg x hatványsorát használja fel (l. pl. [5]-ben!):

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{arc\,tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \pm \ldots$$

ahol $n \in \mathbf{N}$. Ez a sor $x=1$ esetén konvergens. $x=1$ helyettesítéssel megkapjuk az ismert Leibniz-féle összefüggést:

$$\text{(2)} \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Ennek s a cikkben szereplő egyéb, a középiskolai anyagon túlmutató ismeretnek elegáns levezetése [6]-ban található meg.

Sajnos, a (2) sor sem konvergál túl gyorsan. Ezen úgy segíthetünk, ha a $\pi/4$-et több szög összegeként írjuk fel. Az általam írt program a következő felbontást használja:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}, \tag{3}$$

amely a szögek összegének tangensére vonatkozó azonosság alapján könnyen belátható. Ekkor (1)-et az $x=1/2$ és $x=1/3$ helyettesítésekkel kell felírni. A számlálók nullasorozatokat alkotnak, ezért a konvergencia gyorsabb lesz. A (3)-hoz hasonló jellegű felbontásokat könnyen találhatunk. Az 1. táblázatban megemlített számítások

1. táblázat

Dátum	Számítógép	Számítási idő	A számított tizedesjegyek száma	A pontos tizedesjegyek száma
1949	ENIAC	70^h	2 040	2 037
1954	NORC	13^m	3 093	3 092
1958	IBM 704	$1^h\ 40^m$	10 000	10 000
1961	IBM 7090	$8^h\ 43^m$	100 265	100 265
1967	CDC 6600	$28^h\ 10^m$	500 000	500 000
1973	CDC 7600	$23^h\ 18^m$	1 001 250	1 001 250
1981	FACOM M 200	$137{,}3^h$	2 000 040	2 000 036
1983	MELCOM COSMO 900	$7^h\ 14^m$	2 097 152	2 097 152

még több, s ezért még kisebb szögek összegeként írták fel a $\pi/4$-et a konvergencia gyorsítása érdekében.

A számítógép természetesen csak véges sok tagját veszi figyelembe a sornak, s a műveleteket is csak korlátozott pontossággal végzi el. A hibát a következőképpen becsülhetjük meg. Legyen

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}. \tag{4}$$

[6] alapján:

$$R_a = \left|\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} - S_n\left(\frac{1}{a}\right)\right| < \frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{2n+1}, \tag{5}$$

ahol $a=2$ vagy 3.

A gépi számítás során ehhez még hozzáadódik a műveletek elvégzésének hibája. Ha a gép k tizedesjegy pontossággal számol, akkor az n számú tag miatt:

$$R_a < \frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{2n+1} + n\cdot 10^{-k}. \tag{6}$$

A számítógép a számolás során annyi tagot vesz figyelembe, hogy teljesüljön az

$$\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{2n+1} < 10^{-k} \tag{7}$$

egyenlőtlenség. Ezért

$$R_a < (n+1)\cdot 10^{-k}, \tag{8}$$

és felhasználva, hogy az $x \mapsto \lg x$ függvény szigorúan monoton növekvő, (7)-ből következik:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{k}{\lg a + 1} - 1\right) < n. \tag{9}$$

Az ilyen n-ek közül már a legkisebb is megfelel, ezért

$$(10) \qquad n \leqq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k}{\lg a + 1} - 1 \right) + 1 \leqq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k}{\lg 2 + 1} + 1 \right).$$

A π hibája (3) és (8) alapján:

$$(11) \qquad \triangle \pi < 8 \cdot (n+1) \cdot 10^{-k}.$$

Ebből (10) felhasználásával:

$$(12) \qquad \triangle \pi < \left(\frac{4k}{\lg 2 + 1} + 12 \right) \cdot 10^{-k}.$$

2. táblázat

3.14159	26535	89793	23846	26433	: 1— 25
83279	50288	41971	69399	37510	: 26— 50
58209	74944	59230	78164	06286	: 51— 75
20899	86280	34825	34211	70679	: 76— 100
82148	08651	32823	06647	09384	:101— 125
46095	50582	23172	53594	08128	:126— 150
48111	74502	84102	70193	85211	:151— 175
05559	64462	29489	54930	38196	:176— 200
44288	10975	66593	34461	28475	:201— 225
64823	37867	83165	27120	19091	:226— 250
45648	56692	34603	48610	45432	:251— 275
66482	13393	60726	02491	41273	:276— 300
72458	70066	06315	58817	48815	:301— 325
20920	96282	92540	91715	36436	:326— 350
78925	90360	01133	05305	48820	:351— 375
46652	13841	46951	94151	16094	:376— 400
33057	27036	57595	91953	09218	:401— 425
61173	81932	61179	31051	18548	:426— 450
07446	23799	62749	56735	18857	:451— 475
52724	89122	79381	83011	94912	:476— 500
98336	73362	44065	66430	86021	:501— 525
39494	63952	24737	19070	21798	:526— 550
60943	70277	05392	17176	29317	:551— 575
67523	84674	81846	76694	05132	:576— 600
00056	81271	45263	56082	77857	:601— 625
71342	75778	96091	73637	17872	:626— 650
14684	40901	22495	34301	46549	:651— 675
58537	10507	92279	68925	89235	:676— 700
42019	95611	21290	21960	86403	:701— 725
44181	59813	62977	47713	09960	:726— 750
51870	72113	49999	99837	29780	:751— 775
49951	05973	17328	16096	31859	:776— 800
50244	59455	34690	83026	42522	:801— 825
30825	33446	85035	26193	11881	:826— 850
71010	00313	78387	52886	58753	:851— 875
32083	81420	61717	76691	47303	:876— 900
59825	34904	28755	46873	11595	:901— 925
62863	88235	37875	93751	95778	:926— 950
18577	80532	17122	68066	13001	:951— 975
92787	66111	95909	21642	01976	:976—1000

Ez azt jelenti, hogy a szám végén legfeljebb $\lg\left(\frac{4k}{\lg 2+1}+12\right)$, pontosabban $\left[\lg\left(\frac{4k}{\lg 2+1}+12\right)\right]+1$ értéktelen tizedesjegy áll, ahol [...] a benne levő szám egészrészét jelöli. A számítógép memóriája korlátozza a kezelhető tizedesjegyek számát, ezért $k<4000$, tehát az értéktelen tizedesjegyek száma legfeljebb 5. (Az új, 64 K memóriával rendelkező gép esetén $k<14\,000$.)

Bár megfelelő szubrutinok segítségével az iskolaszámítógép képes lehet több száz vagy ezer jegyből álló számok kezelésére, ez azonban BASIC-ben igen lassú lenne. A programot ezért gépi kódban írtam meg. Így is szükség volt a több ezer jegyű számokkal műveleteket végző szubrutinokra. Az eredményt pedig át kellett alakítani kettesből tízes számrendszerbe és gondoskodni a megfelelő megjelenítéséről.

A program induláskor bekéri a k értékét. Mivel az eredmény a képernyőre kerül, ezért a k a memória kapacitásától függetlenül legfeljebb 1010 lehet. Ez a korlátozás azonban printer használatával könnyen feloldható. Egy futás eredménye a 2. táblázatban, a különböző futások időtartama, s [3] alapján a kapott értékes jegyek száma a 3. táblázatban látható. (Az időt a π számítását végző géppel összekapcsolt másik

3. táblázat

Számított tizedesjegyek száma (k)	Számítási idő	Pontos tizedesjegyek száma
10	2^s	9
20	5^s	18
50	28^s	48
100	$2^m\ 58^s$	97
200	23^m	198
500	$5^h\ 6^m$	498
1000	$40^h\ 9^m$	998

számítógép mérte.) A programot minden érdeklődőnek szívesen elküldöm.

Shancks angol matematikus a XVIII. sz.-ban 30 évi munkával számította ki a π 707 tizedesjegyét (ráadásul eredménye az 528. tizedestől kezdve téves volt). Az egyik legelső számítógép, az ENIAC 1949-ben 70 óra alatt 2000 tizedesjegyet határozott meg. A számítástechnika viharos gyorsaságú fejlődését jelzi, hogy ma már szinte bárki ezzel összemérhető nagyságrendű eredményt érhet el.

A π meghatározása próbára tette matematikai és számítástechnikai ismereteimet. A feladat megoldása közben nyújtott bátorításért és értékes segítségért szeretnék köszönetet mondani Juhász Tibor tanár úrnak; Orbán Edit tanárnőnek és Horváth Attila tanár úrnak pedig azért, mert felkeltették bennem az érdeklődést a számítástechnika iránt.

Irodalom

[1] F. T. CIMPAN: *A π története.* Kolozsvár, 1971, Albatrosz Kiadó.
[2] SAIN MÁRTON: *Matematikatörténeti ABC.* Budapest, 1984, Tankönyvkiadó, 193—194. oldal.
[3] Y. TAMURA: *Calculation of Pi to 2 Million Decimals.* Proceedings of the International Latitude Observatory of Mizusawa No. 22. 1983. 59—90. oldal.
[4] SIMONOVITS MIKLÓS: *Számítástechnika a speciális matematikai osztályok részére.* Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 167—174. oldal.
[5] G. A. KORN—T. M. KORN: *Matematikai kézikönyv műszakiaknak.* Budapest, 1975, Műszaki Könyvkiadó, 867. oldal.
[6] LÉVÁRDI L.—SAIN M.: *Matematikatörténeti feladatok.* Budapest, 1982, Tankönyvkiadó, 160—162. oldal.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10. II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1137. Barna úrhoz és feleségéhez, Barnánéhoz három házaspár érkezik vendégségbe. Az örömteli találkozás alkalmából egyesek kezet is fogtak egymással. Senki sem fogott kezet azonban a saját házastársával. Barna úr utóbb mindenkitől megkérdezte, hogy hány jelenlevővel fogott kezet. Kérdésére (amelyet hétszer tett fel, hiszen rajta kívül heten voltak a szobában) csupa különböző választ kapott. Hány vendéggel fogott kezet Barnáné?

1138. Kétszáz állításunk közül az első százból az i-edik: „legalább i állítás igaz" ($1 \leqq i \leqq 100$); a további százból a $(100+k)$-adik: „legalább k állítás' hamis' ($1 \leqq k \leqq 100$). Eme kétszáz állítás közül, melyek igazak és melyek nem?

1139. Az $ABCD$ konvex négyszögben a CD oldal egyenese érinti az AB átmérőjű kört. Bizonyítsuk be, ha $AD \parallel BC$, akkor az AB egyenes érinti a CD átmérőjű kört!

1140. Igazoljuk, hogy az egységkocka valamely síkon levő merőleges vetülete területének a mérőszáma egyenlő egy, a vetületi síkra merőleges egyenesen levő vetületének a hosszával!

1141. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a

$$2^x + 2^y - 1 = 3^z$$

egyenletet!

Varga István, Nagyszalonta

1142. Mutassuk meg, hogy ha $x+y+z=a$ és $xy+yz+zx=b$, akkor

$$\max(x, y, z) - \min(x, y, z) \leqq \frac{1}{2}\sqrt{6(a^2-3b)}.$$

Bencze Mihály, Brassó

Feladatmegoldások (1113—1118.)

1113. Bizonyítsuk be, hogy a természetes számok N halmaza felbontható két olyan osztályra, melyek egyikének bármely n elemére n^2+1, míg a másik osztály tetszőleges m elemére m^2+2 nem köbszám!

Nagy Ferenc, Hajdúnánás

I. megoldás: Indirekt okoskodunk. Tegyük fel — az állítással ellentétben, hogy N kívánt osztályozása nem lehetséges. Ekkor van legalább egy olyan k természetes szám, amely egyik osztályba sem sorolható, azaz mind k^2+1, mind k^2+2 köbszám. Ezért

$$m^3 = k^2+2$$

és

$$n^3 = k^2+1 \quad (m > n, \quad m, n \in \mathbf{N})$$

miatt különbségükre:

$$m^3 - n^3 = (m-n)(m^2+mn+n^2) = 1.$$

Feltételeink miatt $m-n=m^2+mn+n^2=1$, és ebből $mn=0$, vagyis $m=1, n=0$ kell legyen. Ezért $k^2+1=0$ adódik, ami ellentmond k természetes szám voltának. Ez az ellentmondás biztosítja az eredeti állítás helyességét.

Csepreginé Ambrus Gabriella, Budapest,
Dr. Marosvári Péter, Budapest

II. megoldás: Legyen N_1 a páros természetes számok halmaza, N_2 pedig a páratlan természetes számok halmaza! Ezek valóban osztályai az N-nek, hiszen egyikük sem üres, diszjunktak és egyesítésük az N.

Mivel $(2k)^2+2=4k^2+2$ és $(2k+1)^2+1=4k^2+4k+2$ egyaránt néggyel nem osztható páros szám, ezért köbszám sem lehet, hiszen a páros köbszámok nyolccal és így néggyel is oszthatók.

N_1 és N_2 a feladat feltételeit kielégítő osztályozása a N-nek.

Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép

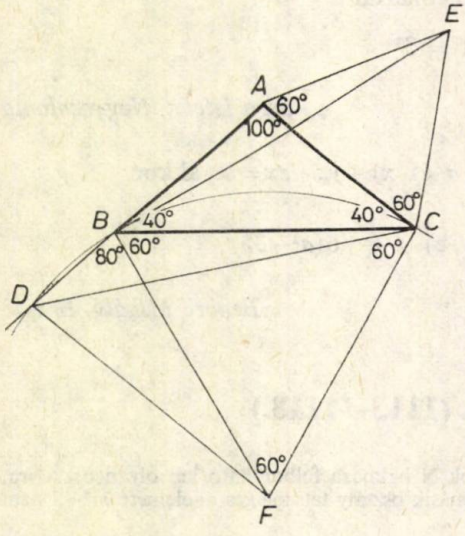
III. megoldás: Az $m^2+2=x^3$ egyenletnek a természetes számok halmazán $m=5, x=3$ számpár az egyetlen megoldása. (E feladat és bizonyítása megtalálható: *Érdekes matematikai gyakorló feladatok V;* Tankönyvkiadó, Bp. 32. feladata, vagy (korrektebb módon) *Sárközy—Surányi: Számelmélet feladatgyűjtemény,* Tankönyvkiadó, Bp. 1979. 209. old. 77. feladata.

Mivel $5^2+1=26$ nem köbszám, ezért a természetes számok halmaza felbontható két osztályra a kívánt módon. Egy lehetséges felbontás a következő: az egyik osztály egyetlen eleme legyen az 5, a másik osztály pedig 5 kivételével tartalmazza a természetes számokat.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 19.

1114. Az ABC egyenlő szárú ($AB=AC$) háromszög B és C csúcsainál levő szöge 40°-os. Mérjük fel az AB félegyenesre B-n túl az $AD=BC$ feltételnek eleget tevő D pontot. Mekkorák a BCD háromszög szögei?



1. ábra

I. megoldás: Emeljünk az AC oldalra kifelé szabályos ACE háromszöget (1. ábra). Az $ADC\triangle$ egybevágó a $BCE\triangle$-gel, mert $BC=AD$, $CE=AC$ és $BCE\sphericalangle=CAD\sphericalangle=100°$. Mivel $BAE\triangle$ egyenlő szárú és szárszöge 160°, így $AEB\sphericalangle=10°$, tehát $BEC\sphericalangle=50°$ és $CDA\sphericalangle=EBC\sphericalangle=30°$. A $BCD\triangle$ szögei tehát: 140°, 30° és 10°.

Róka Sándor, Nyíregyháza

II. megoldás: Emeljünk a BC oldalra kifelé szabályos BCF háromszöget (1. ábra). Az $FCAD$ négyszög szimmetrikus trapéz, mert $AD=CF(=BC)$ és $BAC\sphericalangle=ACF\sphericalangle=100°$. Ebből következik, hogy az FBD egyenlő szárú háromszög, mert $FBD\sphericalangle=80°$, hiszen az $FBA\sphericalangle=100°$-os szög mellékszöge, és $FDB\sphericalangle=80°$, mert $FD\|AC$ miatt a $CAD\sphericalangle=100°$-os szög kiegészítő szöge. Következésképpen $FD=FB(=FC)$ miatt, D az F közepű FB sugarú körön van, tehát $BDC\sphericalangle=30°$, mert a 60°-os középponti szögű BC ívhez tartozó kerületi szög.

Összefoglalva az eddigieket, a $BDC\triangle$ szögei: $BDC\sphericalangle=30°$, $DBC\sphericalangle=DBF\sphericalangle+FBC\sphericalangle=80°+60°=140°$ és így $BCD\sphericalangle=10°$.

III. megoldás: Előbbi ábránk jelöléseit megtartva, a $BCD\sphericalangle = \alpha$ jelöléssel: $ADC\sphericalangle = 40° - \alpha$ és $ACD\sphericalangle = 40° + \alpha$. Az ABC és az ACD háromszögekben egy-egy sinus-tételt felírva:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sin 100°}{\sin 40°} \quad \text{és} \quad \frac{AD}{AC} = \frac{\sin (40° + \alpha)}{\sin (40° - \alpha)}.$$

Mivel $AD = BC$, ezért

$$\frac{\sin 100°}{\sin 40°} = \frac{\sin (40° + \alpha)}{\sin (40° - \alpha)}.$$

De $\sin 100° = \sin 80° = 2 \sin 40° \cdot \cos 40°$, vagyis előbbi egyenlőségünk a

$$2 \sin (40° - \alpha) \cos 40° = \sin (40° + \alpha)$$

alakot ölti.

Ennek bal oldalát a $2 \sin x \cdot \cos y = \sin (x+y) + \sin (x-y)$ azonosság felhasználásával

$$\sin (80° - \alpha) + \sin (-\alpha) = \sin (40° + \alpha)$$

formára hozhatjuk. Ebből rendezéssel

$$\sin (-\alpha) = \sin (40° + \alpha) + \sin (\alpha - 80°)$$

adódik. Most a $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ azonosság miatt a

$$\sin (-\alpha) = 2 \sin (\alpha - 20°) \cos 60° = \sin (\alpha - 20°)$$

egyenlethez jutunk. Ámde $(-\alpha)$ és $(\alpha - 20°)$ szögek sinusa csakis akkor egyenlő, ha különbségük a 360° egész számú többszöröse, vagy pedig összegük a 180° páratlan többszöröse. Minthogy $0 < \alpha < 180°$, ezért csak az

$$\alpha - 20° - (-\alpha) = 0,$$

azaz

$$\alpha = 10°$$

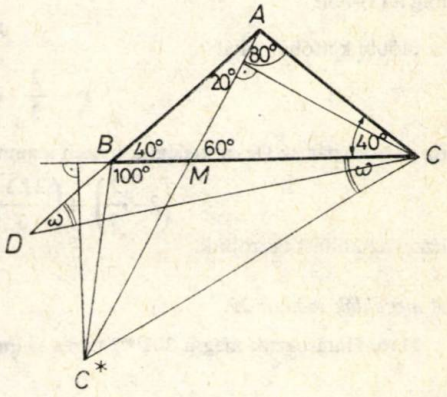
lehetséges. Ezek szerint a BCD háromszög szögei: 10°, 30° és 140°.

Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép

IV. megoldás: Legyen $BCC^* \triangle \cong DAC \triangle$ és a BC egyenes válassza el az A és C^* pontokat (2. ábra). Ekkor az ACC^*B négyszög konvex, hiszen minden szöge konvex: 100°, $\omega + 40°$, $80° - \omega$ és 140°; ugyanakkor $0 < \omega < 40°$, az ábráról is leolvashatóan. Az $ACC^* \triangle$ egyenlő szárú, ezért $CAC^*\sphericalangle = CC^*A\sphericalangle = 20°$, így $CMC^*\sphericalangle = AMB\sphericalangle = 60°$, mert az $ACM \triangle$ külső szöge.

Ebből eredően $MAB\sphericalangle = 80°$. Most belátjuk, hogy $MB = MC^*$. Ehhez elég azt igazolnunk, hogy a B ugyanolyan távol van AM egyenestől, mint a C^* az MC egyenestől. Ez pedig abból következik, hogy mindkét távolság, egy $AB = CC^*$ átfogójú, 80°-os szöggel szemközti befogója egy-egy derékszögű háromszögnek. Következésképpen $MBC^*\sphericalangle = MC^*B\sphericalangle = \omega = \frac{60°}{2} = 30°$, hiszen az $AMB\sphericalangle$ külső szöge a BMC^* háromszögnek.

A $BCD \triangle$ szögei: 10°, 30°, 140°.



2. ábra

Dr. Marosvári Péter, Budapest

Megjegyzés: Mindazokat a dolgozatokat, amelyekben a $BCD \triangle$ szögeit trigonometrikus táblázatok közelítő értékeivel 10°-ra, 30°-ra és 140°-ra kerekítve adták meg, megoldásként nem fogadtuk el, hiszen a sejtés még nem bizonyosság.

A megoldók száma: 27.

1115. Az A, B, C kollineáris ponthármasra $AC:CB=3$. Az AC és a CB szakasz mint átmérő fölé írjunk félköröket. Emeljük az A, illetve a B pontban AB-re merőleges a, illetve b egyenest. Legyen k az a és b egyeneseket, továbbá a nagyobbik átmérőjű kört érintő kör. Bizonyítsuk be, hogy van a b egyenest, a k kört és a két félkört érintő kör!

Megoldás: Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $AC=3$ hosszúság egység és $CB=1$ hosszúság egység, továbbá C elválasztja A és B-t, különben nincs a feltételeket kielégítő kör. A feladatot koordinátageometriai úton oldjuk meg. Válasszuk meg a koordináta-rendszert a *borítón levő ábra* szerint! Olyan K pontot keresünk, amely az E, F, G középpontú köröktől és a b egyenestől egyaránt, egyenlő x távolságra van.

Határozzuk meg G és K koordinátáit! Mivel a G közepű k kör az a és b egyeneseket érinti, ezért rajta van ezek középpárhuzamosán, G első koordinátája tehát 2. Mivel GE a két kör érintkező volta miatt $\frac{7}{2}$ hosszúságú, ezért második koordinátája Pitagorász-tételéből

$$\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=2\sqrt{3}.$$

Legyen K második koordinátája y. Ekkor K első koordinátája $4-x$, mert a K közepű kör (ha létezik) érinti a b egyenest.

Tehát: $G(2;\ 2\sqrt{3})$ és $K(4-x, y)$.

Feltételeink szerint:

$$KG=x+2,\quad KE=\frac{3}{2}+x \quad \text{és} \quad KF=\frac{1}{2}+x.$$

Ezekre felírva a megfelelő két pont távolságát koordinátáik függvényében is

$$(1)\quad (4-x-2)^2+(y-2\sqrt{3})^2=(x+2)^2,$$

$$(2)\quad \left(4-x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2,$$

$$(3)\quad \left(4-x-\frac{7}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2.$$

A (2)-ből rendezés után:

$$y^2=8x-4,$$

míg a (3)-ból

$$y^2=2x,$$

ez utóbbi kettőből tehát

$$x=\frac{2}{3} \quad \text{és} \quad y=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ez az értékpár az (1)-et kielégíti, hiszen azonnal látható, hogy

$$\left(2-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}+2\right)^2.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Rischákné Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely

A megoldók száma: 22.

1116. Határozzuk meg a 302^{1000} (tízes számrendszerbeli) szám első két számjegyét!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás: Vegyük észre, hogy

$$[\log 302^{1000}]=[\log 9\cdot 302^{1000}]=2480,$$

azaz a 302^{1000} és a $9\cdot 302^{1000}$ számoknak ugyanannyi jegyük van a tízes számrendszerben. Ebből pedig következik, hogy a 302^{1000} szám első jegye az 1, a második jegye pedig 0 vagy 1, különben a szám kilencszerese emennél több jegyű volna.

Ugyanakkor $\left[\log \frac{302^{1000}}{11}\right]=2478$, vagyis a 302^{1000} számot 11-gyel osztva a hányados egész részének kettővel kevesebb számjegye van, mint a 302^{1000}-nek. Ezek szerint e szám második jegye a 0 lehet csak.

A szerző megoldása

A megoldók száma: 13.

1117. Legyen $n=4k+1$ természetes szám, p pedig tetszőleges prímszám. Mutassuk meg, hogy az $M=\left\{\binom{p^n}{1}, \binom{p^n}{p}, \ldots, \binom{p^n}{p^{n-1}}\right\}$ halmaz elemei nem sorolhatók két, nem üres, diszjunkt részhalmazba (melyek egyesítése az M) úgy, hogy az egyik halmaz elemeinek a szorzata egyenlő legyen a másik halmaz elemeinek szorzatával.

Cseh László, Kolozsvár

Megoldás: Elég megmutatni, hogy M elemeinek a szorzata

$$\prod_{t=0}^{n-1}\binom{p^n}{p^t} \tag{1}$$

nem lehet négyzetszám, mert e szorzatban a p kitevője páratlan.

Legendre következő tételét fogjuk felhasználni (Hajós—Neukomm—Surányi: Matematikai versenytételek 1925/2. jegyzet, Tankönyvkiadó, Bp. 1965., 125. oldal): Jelentsen m tetszőleges pozitív egész számot, p pedig prímszámot. Az $m!$-ban p kitevőjét a

$$\frac{m-s}{p-1} \tag{2}$$

hányados adja, ahol s az m-nek a p alapú számrendszerben írt alakjában a jegyek összegét jelenti. Vizsgáljuk meg, hogy $\binom{p^n}{p^t}$-ben p hányadik hatványon szerepel! Legyen m rendre p^n, p^t, p^{n-t}. Az első két esetben $s=1$, tehát (2)-ből

$$p^n!\text{-ban } \frac{p^n-1}{p-1} \quad \text{és} \quad p^t!\text{-ban } \frac{p^t-1}{p-1}$$

lesz p kitevője.

A p^n-p^t jegyeinek összege a p alapú számrendszerben $(n-t)(p-1)$, tehát p kitevője $(p^n-p^t)!$-ban

$$\frac{p^n-p^t-(n-t)(p-1)}{p-1};$$

A hatványozás azonosságait figyelembevéve $\binom{p^n}{p^t}$-ben p kitevője tehát:

$$\frac{p^n-1}{p-1}-\frac{p^t-1}{p-1}-\frac{p^n-p^t-(n-t)(p-1)}{p-1}=n-t.$$

Szintén a hatványozás azonosságait felhasználva (1)-ben p kitevője:

$$\sum_{t=0}^{n-1}(n-t)=n^2-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2};$$

Mivel $n=4k+1$, ezért $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(4k+1)(4k+2)}{2}=(4k+1)(2k+1)$, vagyis két páratlan szám szorzata, azaz páratlan. Kaptuk tehát, hogy (1)-ben p kitevője páratlan, így (1) nem lehet négyzetszám, s ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 13.

1118. Jelöljön E egy legalább két elemű véges halmazt, $f: E \to E$ pedig egy nem injektív függvényt. Legyen n az a legkisebb természetes szám, amelyre

$$\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n\text{-szer}}(E) = \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n+1\text{-szer}}(E).$$

Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész i-hez, mely nem nagyobb n-nél, létezik $x_i \in E$ úgy, hogy $x_i, f(x_i), (f \circ f)(x_i), \ldots, (f \circ f \circ \ldots \circ f)_{i-1}(x_i)$ közül semelyik sem eleme $(f \circ f \circ \ldots \circ f)_i(E)$-nek!

Merényi Imre, Kolozsvár

Megoldás: Legyen, ha $k \in \mathbf{N}$

$$f^{(0)}(x) := x \quad \text{és} \quad f^{(k)}(x) := \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{k\text{-szor}}(x).$$

Mivel f nem injektív, így $f(E) \neq E$, azaz $n \geqq 1$. Ha $i \leqq n$, úgy

$$f^{(i)}(E) \subset f^{(i-1)}(E),$$

és a tartalmazás valódi. Létezik tehát oly $x_i \in E$, amelyre $f^{(i-1)}(x_i) \notin f^{(i)}(E)$, de ugyanakkor $f^{(i)}(x_i) \in f^{(i)}(E)$. Ebből következik, hogy az

$$x_i, \quad f(x_i), \quad f^{(2)}(x_i), \ldots, \quad f^{(i-2)}(x_i)$$

elemek közül egy sincs $f^{(i)}(E)$-ben, különben ha valamely k-ra $0 \leqq k \leqq i-2$ és

$$f^{(k)}(x_i) \in f^{(i-2)}(E), \quad \text{úgy}$$

$$f^{(k)}(x_i) \in f^{(k+1)}(E), \quad \text{és ebből}$$

$$f^{(i-1)}(x_i) \in f^{(i)}(E),$$

ami ellentmondás.

Róka Sándor, Nyíregyháza

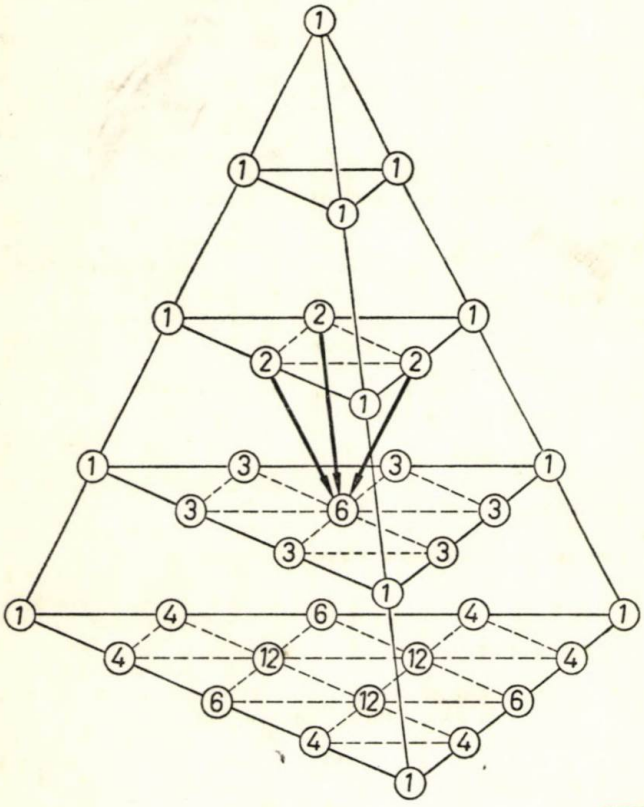
A megoldók száma: 11.

A megoldók névsora (1113—1118.)

Bagi Gábor, Barcs (1115.); Barta László, Nógrádmegyer (1113—1118.); Bencze Mihály, Brassó (1113., 1114., 1116—1118.); Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy (1113—1116., 1118.); Bondár Mária, Csorna (1114.); Cseh László, Kolozsvár (1113—1118.); Csepreginé Ambrus Gabriella, Budapest (1113., 1114.); Csorba Ferenc, Győr (1113—1115., 1117.); Fazekas Jánosné, Szeghalom (1114., 1115.); Hajdu Ferenc, Nagykálló (1113.); Hajna János, Pécs (1114—1117.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest (1113., 1114.); Horváth Géza, Zselíz (1114. 2 mód.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1113—1118.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (1113—1115.); Kiss Géza, Kisújszállás (1113., 1117., 1118.); Kovács Béla, Szatmár (1114.); Dr. Major Pál, Budapest (1114., 1115.); Dr. Marosvári Péter, Budapest (1113—1116.); Merényi Imre, Kolozsvár (1113—1118.); Mészáros József, Galánta (1113—1116.); Rischákné Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (1113., 1115.); Róka Sándor, Nyíregyháza (1113. 3 mód, 1114., 1115., 1117., 1118.); Sándor József, Farcád (1113—1118.); Sebestyén László, Budapest (1114. 2 mód, 1115.); Szánthó Gyula, Gyula (1114—1116.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (1113., 1114., 1117., 1118.); Varga István, Nagyszalonta (1113., 1114., 2 mód, 1115., 1117. 2 mód); Vágóné Roland Katalin, Törökbálint (1114., 1115.); Váradi József, Gelence (1114., 1115.); Wekszli Ákos, Csorna (1114., 116.). Zalán Péterné, Budapest (1114—1116.).

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1986. november * XXXIII. évfolyam 5 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

86-3057 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7 Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését, *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal (nyugdíjasok törzsszámukat).

TARTALOM

Dr. Czeglédy István—Dr. Hajdu Sándor—Novák Lászlóné: Javasolt tanmenet matematikából az általános iskola 6. osztálya számára 129
Darvasi Gyula: Egy szindominójáték: a quadrominó 136
Dr Fekete István: Jelölések és ábrázolások a műszaki főiskola matematika-számítástechnika tantárgyában 142
Fitos László: A négyzetgyökös közép és alkalmazása csonkagúlára 145
Naszádi Gábor: Trinomiális együtthatók a Pascal-típusú tetraéderben 147
Sztrókayné Földvári Vera: 1986 152
Dr. Scharnitzky Viktor: Beszámoló a Hajós György Matematikai Tanulmányi Versenyről 154
Dr. Varecza Árpád: Egy sorbaállási problémáról 156
ÚJ KÖNYVEK ..... III.

СОДЕРЖАНИЕ

Д-р Цегледи Иштван—Д-р Хайду Шандор Новак Ласлоне: Рекомендуемый учебный план по математике для 6 класса общеобразовательной восьмилетней школы 129
Дарваши Дьюла: Игра в цветное домино: крадромино 136
д-р Фекете Иштван: Способы обозначения и изображения в математиковычислительном цикле втузов 142
Фитош Ласло: Среднее квадратного корня и его применение на усечённой пирамиде 145
Насади Габор: Триномиальные коэффициенты в тетраэдре типа Паскаля.. 147
Строкаине Фёлдвари Вера: 1986 152
д-р Шарницки Виктор: О математическом соревновании им. Хайоша Дьёрдя 154
д-р Варецза Арпад: Об одной проблеме становления в очередь 156
НОВЫЕ КНИГИ ..... III.

INHALT

Dr. Czeglédy, István—Dr. Hajdu, Sándor—Frau Borbála Novák (geb.: Kapczár): Eine vorgeschlagene Einteilung des Lehrstoffes Mathematik in Lerneinheiten für die 6. Klasse der Grundschule 129
Darvasi, Gyula: Ein farbiges Dominospiel: das Quadromino 136
Dr. Fekete, István: Bezeichnungen und Darstellungen im Unterrichtsfach Mathematik-Rechentechnik der technischen Hochschule 142
Fitos, László: Das Potenzmittel mit dem Exponenten 1/2 und dessen Anwendung auf den Pyramidenstumpf 145
Naszádi, Gábor: Trinomkoeffizienten im Tetrader vom Pascalschen Typ 147
Frau Vera Sztrókay (geb.: *Földvári*): 1986
Dr. Scharnitzky, Viktor: Bericht über den mathematischen Wettbewerb György Hajós 152
Dr. Varecza, Árpád: Über ein Schlangestehen-Problem 154
NEUE BÜCHER 156
..... III.

DR. CZEGLÉDY ISTVÁN—DR. HAJDU SÁNDOR—NOVÁK LÁSZLÓNÉ
főiskolai docens — intézeti munkatársak
Bessenyei György Tanárképző Főiskola Nyíregyháza
Országos Pedagógiai Intézet Budapest

Javasolt tanmenet matematikából az általános iskola 6. osztálya számára

1. Az óra sorszáma	2. *Aktuális tananyag* Koncentráció, ismétlés, gyakorlás	3. Tan-eszköz
1. SZÁMOK, MŰVELETEK 10 óra		
1., 2.	*A tizes számrendszerről, a helyiértékes írásmódról tanultak ismétlése, bővítése, rendszerezése* A tizedestört fogalma. Szorzás, osztás 10 hatványaival. Tájékozódás a számegyenesen. Számok nagyságrendje. Sorozatok. Tört tizedestört alakja. Törtek egyszerűsítése. A normálalak fogalmának, a normálalakkal történő számolásnak az előkészítése.	Fr. **101—139.**
3.	*A mértékegységről tanultak ismétlése, megszilárdítása, átváltások gyakorlása.* A mérőszám felírása 10 hatványaival. A mérőszám felírása tört, tizedestört alakban. A terület- és térfogatszámításról tanultak felelevenítése. Műveletek 10 hatványaival. Tizedestörtek szorzása, osztása természetes számmal. Kapcsolat a fizikával: út, idő, sebesség, térfogat, tömeg, sűrűség.	Fr. **140—151.**
4.	*Műveletek gyakorlása* Műveletek természetes számokkal. Tizedestörtek összeadása, kivonása, szorzásuk, osztásuk természetes számmal. A komponensek változásával hogyan változik az eredmény? A műveletek eredményének becslése, ellenőrzése. A műveletek inverze.	Fr. **152.**
5., 6.	*Kerekítés, pontos érték, közelítő érték.* Mikor indokolt a kerekítés, mikor nem? Természetes számok egyes, tizes, százas stb. szomszédjai. Tizedestörtek kerekítése adott értékre. Kerekített számok helye a számegyenesen. Közelítő érték felírása kettős egyenlőtlenséggel. Műveletek eredményeinek becslése. A hiba becslése. Törtek tizedestört alakja. Mérések. Terület-, felszín-, térfogatszámítás. Mértékegységek átváltása.	Fr. **153—170.**
7., 8.	*A törtekről tanultak ismétlése.* A törtek kétféle értelmezése, átírásuk tizedestörtté. Törtek összehasonlítása, egyszerűsítése, bővítése. Törtek összeadása, kivonása, szorzása és osztása természetes számokkal. Sorozatok, függvények, nyitott mondatok. Műveletek tizedestörtekkel. Kombinatorikus feladatok.	Fr. **171—186.**

Fr.: Matematika-feladatrendszerek 6. osztály

1.	2.	3.
9.	*A nyitott mondatokról tanultak ismétlése.* Nyitott mondatok megoldása próbálgatással. A megoldás ábrázolása számegyenesen. A mérlegelv alkalmazása egyszerű feladatokban. Számolás törtekkel és tizedestörtekkel. A törtek nagyságszerinti rendezése. A derékszögű koordináta-rendszer.	Fr. 187., 188.
10.	*Gyakorlás.* A számfogalom, a számolási jártasságok és készségek, az algebrai alapismeretek és jártasságok mérése (tudáspróba), a felzárkóztatás megszervezése.	Fr. 189.
2. MÉRÉSEK ÉS SZERKESZTÉSEK 8 óra		
11.	*A geometriai alapfogalmak ismétlése.* Egyenesek kölcsönös helyzete a síkban és a térben. Merőleges és párhuzamos egyenesek szerkesztése, alkalmazásuk egyszerű szerkesztéses feladatokban. A szögekről tanultak ismétlése, gyakorlása. Szög mérése, rajzolása, másolása.	Szívószál.
12.	*Adott tulajdonságú pontok.* Ponthalmazok távolsága. A távolság megszerkesztése, alkalmazása egyszerű szerkesztési feladatokban. Koordináta-rendszer, kerület-, területszámítás. Négyszögek osztályozása, kerületük, területük kiszámítása.	Fr. 204—206. Tk. 275/1—3. 276/15. Szívószál.
13., 14.	*A kör húrja, érintője.* Kör és egyenes kölcsönös helyzete. Érintők rajzolása különböző görbékhez. A szerkesztéses feladatok megoldásának lépései. Érintő szerkesztése a kör adott pontjába. Egyenes érintő körök. A háromszög köré húzható kör. Húrnégyszög.	Tk. 202—209. 276/16.' 17. Fr. 207—213.
15.	*A kör kerülete.* A kör kerületének megállapítása közelítő módszerrel: az 1 dm sugarú félkörív hossza megközelítően 3,14 dm, az r sugarú kör kerülete megközelítően $2 \cdot r \cdot 3{,}14$.	Fr. 214—216.
16.	*Középponti szögek, szögmásolás.* Az egyenlő sugarú körökben az egyenlő húrokhoz egyenlő szögek tartoznak. A szögmásolás lépései, a szerkesztés indoklása. A szögek fajtái. Arányossági következtetések. Hasonlóság.	Fr. 217—221.
17., 18.	*Szerkesztések és geometriai számítások gyakorlása* A tanultak ellenőrzése.	Fr. 222—224., 227., 228.
3. MŰVELETEK EGÉSZ SZÁMOKKAL 14 óra		
19—22.	*Az egész számok halmaza.* *Az egész számok összeadása és kivonása.* Ellentétes mennyiségek. A számok ellentettje, abszolútértéke. Egész számok összehasonlítása, helyük a számegyenesen. Az egész számok összeadása, kivonása eszközzel és eszköz nélkül is a szemléletből és az összeg, illetve a különbség változásaiból kiindulva. Összeadás és kivonás negatív törtekkel, tizedestörtekkel is. Sorozatok, szabályjátékok. A derékszögű koordináta-rendszer. Függvénytranszformációk, geometriai transzformációk előkészítése.	Tk. 7—11., 23—29/1—38 Fr. 301—308. Adósság, készpénz, kisautó.

Tk.: Matematika általános iskola 6. című tankönyv.

1.	2.	3.
23—25.	*Szorzás, osztás az egészek körében. Hatványozás.* A szorzás és az osztás új értelmezése. Az osztás mint a szorzás fordított művelete. A szorzat és a hányados változásainak vizsgálata az egész számok körében. Sorozatok. Egyenes arányosság. Szabályjátékok. Koordináta-rendszer.	Tk. 12—23., 29—30/39—48. Fr. 309—318.
26—28.	*A szorzás, osztás, hatványozás gyakorlása. Algebrai kifejezések számértékének kiszámítása.* Műveletek sorrendje. Szabályjátékok, sorozatok. Geometriai transzformációk, függvénytranszformációk előkészítése.	Tk. 31/53—56., 33—35/67—91.
29—31.	*Nyitott mondatok megoldása. Mérlegelv.* Pozitív és negatív egészek, törtek, tizedestörtek összevonása. Lineáris függvény.	Tk. 31/49—52. Fr. 319—327.
32.	Az egészről tanultak diagnosztizálása. *Gyakorlás.* A hiányosságok pótlásának megszervezése.	Fr. 328.
4. SOKSZÖGEK 12+2 óra		
33.	*Sokszögek csoportosítása* különböző szempont szerint. Konvex, nem konvex, van tükörtengelye stb. Igaz, hamis állítások, „minden", „van olyan", „ha..., akkor...", „pontosan akkor", ha...," alakú állítások.	Fr. 401—410.
34., 35.	*Háromszög szerkesztése.* A szerkesztés lépéseinek megtervezése, a szerkesztés helyességének igazolása. Szögmérés, alakzatok távolsága, a derékszögű háromszög területe	Fr. 411—415.
36., 37.	*A háromszög belső szögeinek összege. A külső szög fogalma, összegük.* A belső szögek, illetve a külső szögek összegével kapcsolatos számítási és szerkesztési feladatok. Egyenletek, egyenlőtlenségek. Parkettázás. Háromszögek hasonlósága. A derékszögű koordináta-rendszer.	Tk. 212—215., 275—276/4—14. Fr. 416—425.
38., 39.	*A sokszögek belső és külső szögeinek összege.* Sokszögek felbontása háromszögekre. A négyszög szögeinek összege. Kombinatorikus feladatok. Egyenletek.	Tk. 216—223. Fr. 426—437.
40., 41.	*A szabályos sokszögek.* Sokszögek osztályozása tükrösség, oldalak egyenlősége, szögek egyenlősége szerint. A szabályos sokszög köré kör húzható. Középponti háromszögek. Egy belső szögének kiszámítása. Szerkesztésük. Szögmérés, szögrajzolás. Parkettázás szabályos sokszögekkel. A sík különböző mozgatásával fedésbe hozhatók a szabályos sokszögek.	Tk. 221—223. Fr. 438—441.

1.	2.	3.
42., 43.	*Háromszögek, négyszögek átdarabolása téglalappá, területük kiszámítása.* A terület mértékegységei. A téglalap és a derékszögű háromszög területe.	Tk. 283—285/98—105. Fr. 442—448.
44.	*A sokszögekről tanultak rendszerezése*, gyakorlása.	Fr. 449—458.
45., 46.	*Az 1. dolgozat írása és javítása.*	
5. A TERMÉSZETES SZÁMOK VILÁGA 12 óra		
47., 48.	*Maradékos osztás, az összeg és a szorzat oszthatósága.* Számoljunk a maradékkal! Az oszthatósági szabályok előkészítése. Zárójelek alkalmazása, műveleti tulajdonságok.	Tk. 36—40. Tk. 71—72/1—10. Fr. 501—511.
49., 50.	*Oszthatóság 2-vel, 5-tel, 10-zel, 4-gyel, 25-tel, 100-zal.* Részhalmaz, halmazok metszete. A tanult logikai műveletek alkalmazása. 10 hatványaival való oszthatóság. Oszthatóság 8-cal, 125-tel.	Tk. 41—46. Tk. 72/11. Fr. 512—515.
51., 52.	*Oszthatóság 3-mal, 9-cel.* Oszthatóság 6-tal. Vegyes oszthatósági feladatok. Igaz, hamis állítások. Halmazok metszete, részhalmaz, kiegészítő halmaz.	Tk. 47—49. Tk. 73—75/13—34. Fr. 516—521.
53., 54.	*Törzsszám, összetett szám.* Osztópárok, számok építése prímtényezőkből, számok prímtényezőkre bontása, az osztók, többszörösök prímtényezős alakja. A szorzat tulajdonságai. Egyenlő alapú hatványok szorzatának, illetve hányadosának előkészítése. Kombinatorika. Sorozatok. Terület-, térfogatszámítás.	Tk. 52—62. Tk. 76/43—48. Fr. 522—543.
55., 56.	*Közös osztók, közös többszörösök.* A legnagyobb közös osztó, a legkisebb közös többszörös megkeresése a törzstényezős alak segítségével. Törtek összehasonlítása, összeadása, kivonása. Halmazok metszete. Kombinatorikus feladatok. Egyenlő alapú hatványok szorzása, osztása.	Tk. 63—71. 75/35—42., 76/49., 50. Fr. 544—559.
57., 58.	*Gyakorlás. Tudáspróba*	Tk. 76/51—75. Fr. 560—566.
6. TENGELYES TÜKRÖZÉS 16+2 óra		
59., 60.	*Transzformációk vizsgálata* parkettán, rácson, koordináta-rendszerben. A sík mozgatásával előállítható transzformációk (egybevágósági transzformációk). A tengelyes szimmetria fogalma szemléleti szinten. A tengelyes tükrözés mint térbeli elforgatás. Koordináta-rendszer, szorzás negatív számmal.	Tk. 235—243., 276/21., 22. Fr. 801—804., 807. 808.
61., 62.	*A tengelyes tükrözés tulajdonságainak vizsgálata.* A tengelyes tükrözés végrehajtása. Pont, szakasz, háromszög stb. tengelyesen szimmetrikus képe. Merőleges egyenesek szerkesztése, szakasz felezőmerőlegese. Derékszögű koordináta-rendszer. Pozitív és negatív szögek.	Tk. 243—246. 277., 278/30—33.

1.	2.	3.
63.	*Tengelyesen tükrös alakzatok vizsgálata.* tengelyek a körben, szabályos sokszögek tükörtengelyei.	Tk. 247—250., 276/23—29.
64., 65.	*Tengelyesen tükrös háromszögek vizsgálata.* Az egyenlő szárú és egyenlő oldalú háromszögek tulajdonságai, szerkesztésük, területük meghatározása.	Tk. 251., 252., 278/42., 43. 279/48—55. 93—96., 102—3.
66., 67.	*Szerkesztések a tükrös háromszögek tulajdonságai alapján.* A szögfelező mint tükörtengely. Szögmásolás, szögfelezés, 30, 60, 90, 120, 45 fokos szögek szerkesztése. A háromszög belső és külső szögei. A szakasz felezőmerőlegese és a szögfelező mint adott tulajdonságú ponthalmaz. Szögmérés.	Fr. 809—815. Tk. 253—261., 279., 280/56—70. Fr. 816—818.
68., 69.	*Deltoid, rombusz* származtatása tükrös háromszögekből. Tulajdonságaik vizsgálata. Területük átdarabolással, kiegészítéssel. Szerkesztésük. A négyszögek belső és külső szögei. A tengelyes tükrözés tulajdonságai. Nevezetes szögek szerkesztése.	Tk. 264—270., 281., 282/79., 80. 85—91., 285., 286/105—110.
70., 71.	*A húrtrapéz* mint speciális húrnégyszög. Tulajdonságainak vizsgálata, belső és külső szögei, területe, átdarabolása, szerkesztése. Négyszögek belső és külső szögei, a tengelyes tükrözés tulajdonságai, szögmérés, szögrajzolás, nevezetes szögek szerkesztése.	Tk. 271—274. 281/81—84., 282/92. 286/120.
72., 73.	*A tükrös alakzatok szerkesztésének, területszámításának gyakorlása.* Háromszögek és négyszögek belső és külső szögei. A derékszögű koordináta-rendszer.	Tk. 280., 281/74—78.' 284/100., 286/122., 106—109.
74.	*Tükrös alakzatok, a tengelyes tükrözés tulajdonságainak összefoglalása, rendszerezése.* A tanultak diagnosztizálása, a hiányosságok pótlásának megszervezése.	Tk. 280/71—73., 286/111. Fr. 819., 820.
75., 76.	*A 2. dolgozat írása és javítása.*	
7. MŰVELETEK TÖRTEKKEL 22 óra		
77., 78.	*A törtekről tanultak ismétlése, kiegészítése.* A tört kétféle értelmezése, egyszerűsítése, bővítése, összehasonlításuk. Törtek, tizedestörtek összeadása, kivonása. Mértékegységek, terület-, kerületszámítás. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös. Negatív szám, abszolútérték, ellentett. Műveletek negatív számokkal. Egyenletek, egyenlőtlenségek. Az arány fogalmának előkészítése.	Tk. 114—120/15—57. Fr. 701—720.
79., 80.	*Szorzás törttel.* A törtrész és a törttel való szorzás kapcsolata. Az egésszel történő szorzás felevenítése. Nyitott mondatok. A szorzás műveleti tulajdonságai. A szorzat változásai, a szorzat egyszerűsítése.	Tk. 80—90., 121—123/59—79. Fr. 721—742.
81., 82.	*Szorzás tizedestört alakú számmal.* A szorzás műveleti tulajdonságai. A szorzat változásai. Szorzás, osztás 10 hatványaival. Arányossági következtetések. Mennyiségek, mértékegységek.	Tk. 91—93. Fr. 743—752.
83., 84.	*A százalékérték kiszámítása* következtetéssel és tizedestörttel való szorzással. Mennyiség törtrészének kiszámítása.	Tk. 137/193—201. Fr. 753., 754.

1.	2.	3.
85.	*A törttel való szorzásról tanultak gyakorlása*, rendszerezése	Fr. 755.
86., 87.	*Osztás tört alakú számmal.* Az egésszel történő osztás felelevenítése. Az osztás mint a szorzás fordított művelete. A reciprok fogalma. Az egész mennyiség kiszámítása. Nyitott mondatok. Kerület, terület, térfogat. Sorozatok, szabályjátékok.	Tk. 93—98., 125/93—96. Fr. 756—769.
88., 89.	*Osztás tizedestört alakú számmal.* A hányados változásai. Osztás 10-zel, 100-zal stb. 0,1-, 0,01-dal stb. Osztás helyett szorzás az osztó reciprokával. Osztás negatív számmal. 0 az osztásban. Nyitott mondatok.	Tk. 99. 136/181. 183. Fr. 770—775.
90., 91.	*Az alap kiszámítása* következtetéssel és törttel való osztással. Osztás törttel, tizedestörttel.	Tk. 101., 137/198. Fr. 776—778.
92.	*Az arány* jelentése, kifejezése különböző alakban. Két vagy több szám kiszámítása összegükből és arányukból. Tört tizedestört alakja, százalék alakja. Következtetési feladatok. Mennyiségek aránya. Térképről távolságok meghatározása.	Tk. 108., 109., 137/202—204.
93., 94.	*A százalékláb kiszámítása* következtetéssel. A százalékláb mint két mennyiség aránya. Osztás törttel, tizedestörttel. Következtetési feladatok.	Fr. 779., 780.
95.	*A százalékszámítás gyakorlása, rendszerezése.*	
96.	*Az osztásról tanultak rendszerezése.*	
97., 98	*Műveletek racionális számokkal.* A törtekről, tizedestörtekről tanultak gyakorlása, rendszerezése. Egyenletek, egyenlőtlenségek, geometriai számítások algebrai kifejezések számértéke.	Fr. 781—796. 805., 806.
	Tudáspróba.	Fr. 797., 798.

8. A KÖR TERÜLETE. TESTEK ÉPÍTÉSE 10+2 óra

99—102.	*A kör területe közelítéssel.* A kör területének közelítő értéke. A körcikk területe. A kör kerülete. Következtetési feladatok. Százalékszámítás. Henger készítése, felszíne egyszerűbb esetben.	Fr. 1001—1028.
103., 104.	*Térelemek kölcsönös helyzete* Egyenesek kölcsönös helyzete a síkban és a térben. Síkok kölcsönös helyzete. Hajlásszög, lapszög. Kombinatorika.	Tk. 224—226. Fr. 601—615.
105—108.	*Testek építése.* A felépített testek felszíne, térfogata. Testhálók készítése. Testek ábrázolása különböző helyzetekben. Kombinatorika. Nyitott mondatok. Területszámítások.	Tk. 227—229. Fr. 616—621.
109., 110.	*A 3. dolgozat írása és javítása.*	

9. NYITOTT MONDATOK 12. óra

111., 112.	*A nyitott mondat, egyenlet, egyenlőtlenség* fogalma. Az alaphalmaz szerepe. Igazsághalmaz. Azonosság, azonos egyenlőtlenség. Műveleti tulajdonságok. Halmazok.	Tk. 138., 139. Fr. 901—908.

1.	2.	3.
113—115.	*A két oldal egyenlő változtatása.* Egyszerű egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása a mérlegelv segítésével, a szemléletre támaszkodva. A lépések indoklása a művelet és inverze közti kapcsolattal.	Tk. 142—147., 179/65—73. Fr. 909—919.
116—118.	*Szöveges feladatok megoldása egyenlettel.* Rajzos modell, táblázatok. Az egyenlet felírása és megoldása. Százalékszámítás. Geometriai számítások. Fizikai fogalmak.	Tk. 178., 179. 47—63. Fr. 920—931.
119—121.	*A mérlegelv lépéseinek tudatosítása. Gyakorlás.* Összetettebb egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása. Szorzás, osztás negatív számmal, a 0 szerepe a műveletekben. Műveletek törtekkel, tizedestörtekkel.	Fr. 932—943. Fk. 181., 182/80—100.
122.	*A nyitott mondatról tanultak ellenőrzése, rendszerezése.*	Fr. 944., 945.
10. KAPCSOLATOK MATEMATIKÁJA 12+2 óra		
123., 124.	*Egyenes arányossági* következtetések. Az egyenes arányosság mint függvény. Mértékegységek. Szögmérés. Százalékszámítás. A derékszögű koordináta-rendszer.	Tk. 164—167., 180/78 Fr. 1101—1111.
125., 126.	*Fordított arányossági következtetések.* A fordított arányosság mint függvény. Területszámítás, térfogatszámítás. Mértékegységek, műveletek.	Tk. 167—172., 179., 180/70—76. Fr. 1112—1120.
127., 128.	*Egyenes és fordított arányossági összefüggések vizsgálata,* megkülönböztetésük egyéb függvénykapcsolatokból. A számtani sorozat mint lineáris függvény. Fizikai összefüggések vizsgálata.	Tk. 180/77. és az előző órák feladatai.
129., 130.	*Függvények vizsgálata.* Grafikonok olvasása, grafikonok készítése. A meredekség vizsgálata. Számok abszolútértéke. Geometriai transzformációk. Műveletek racionális számokkal.	Tk. 159—163., 183., 184/101—106. Fr. 1121—1128.
131., 132.	*Nyitott mondatok megoldása grafikonnal.* Szöveges feladatokról egyenlet, egyenlőtlenség felírása. Műveletek eredményeinek összehasonlítása. Algebrai kifejezés számértéke.	Fr. 1129—1135.
133., 134.	*A függvényekről tanultak rendszerezése,* ellenőrzése, a hiányok pótlása.	Fr. 1136., 1137.
135., 136.	*A 4. dolgozat írása és javítása.*	
11. A TANULT ISMERETEK RENDSZEREZÉSE 10 óra		
137.	A halmazműveletekről tanultak rendszerezése, tudatosítása, kapcsolat a logikai „és", „vagy" műveletekkel. Állítások megfogalmazása, „ha..., akkor...," „pontosan akkor..., ha..." alakú állítások a számelmélet és a geometria körében.	
138.	A tanult számelméleti ismeretek ismétlése.	
139.	Műveletek racionális számokkal.	
140.	Függvények, nyitott mondatok, a mérlegelv.	
141.	A geometriai ismeretek rendszerezése. A tengelyes szimmetria.	
142.	Geometriai számítások.	
143.	Valószínűségi játékok.	Tk. 185—192.
144.	Kombinatorikai feladatok.	Tk. 199—201.
145., 146.	Az előre nem tervezhető hiányok pótlása.	

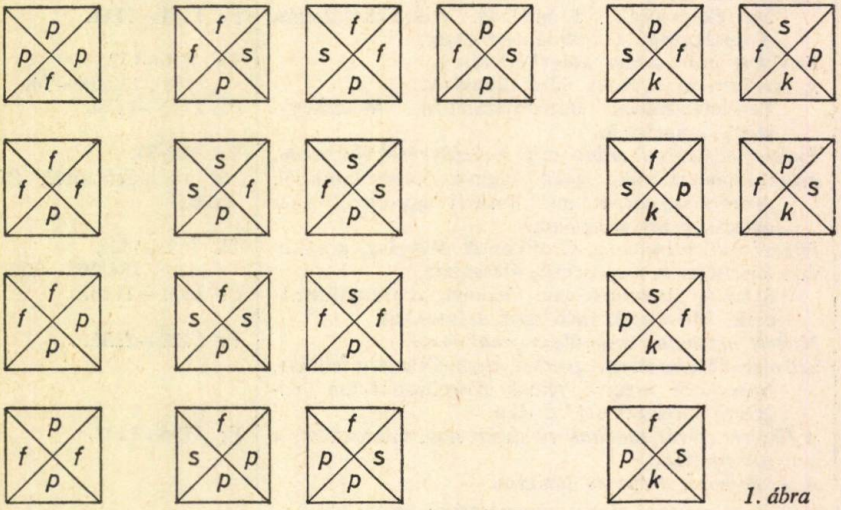
DARVASI GYULA
főiskolai adjunktus
Bessenyei György Tanárképző Főiskola, Nyíregyháza

Egy színdominójáték: a quadrominó

A quadrominó egyike a hazánkban nem közismert síkbeli kirakós játékoknak. Jóllehet mind a játékeszköz, mind a játékszabályok egyszerűek. A játék sikeres kivitelezése pedig igazi intellektuális élményt nyújthat gyerekeknek és felnőtteknek egyaránt, minthogy a játék több matematikai tényt foglal magába és tesz egyidejűleg élvezhetővé korhatártól függetlenül.

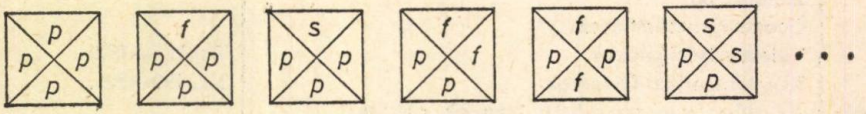
A quadrominó lapjai fehér kartonból könnyen kivágható egybevágó négyzetek, amelyek egyik oldalán mindkét átló megrajzolásával négy részháromszög adódik. Ezek megfelelő kiszínezése után készen is van a játékeszköz. Egy-egy négyzetlap négy részháromszögének kiszínezése végezhető egy színnel, illetve kettő, három, négy vagy még több különböző színnel. Eközben nem tekintjük különbözőknek azokat a kiszínezett négyzetlapokat, amelyek valamilyen módon (például a lapok középpontja körüli elforgatással) átvihetők egymásba.

Mind a négy részháromszöget egy és ugyanazon színnel kiszínezve nyilván-



1. ábra

valóan csak egy quadrominó lap adódik. Könnyen ellenőrizhető továbbá, hogy a pontosan kettő, három, illetve négy színnel kiszínezett különböző quadrominó lapok száma négy, kilenc, illetve hat (1. ábra). Ez az ellenőrzés kettős feladatot jelent: egyrészt minél több különböző quadrominó lap előállítását, másrészt annak indoklását, hogy a megtalált lapokon kívül már nincs több. Ezek a tevékenységi formák elvezetnek ahhoz a tapasztalathoz, hogy a lapok előállítása során érdemes valamilyen szisztematikus utat választani. Ehhez szempont lehet például a különböző színek egy lapon való elhelyezkedése,



2. ábra

illetve azok aránya. Több különböző szín esetén a szisztematikus eljárás matematikailag teljesen különböző tevékenységi forma lehet. A következőkben ezek közül ismertetünk néhányat.

1. Valamilyen sorrend követése, azaz rendezés (2. ábra).
2. Minden lehetőséget átfogó diszjunkt részhalmazok rendszerének előállítása, azaz bizonyos szempont szerinti osztályozás.

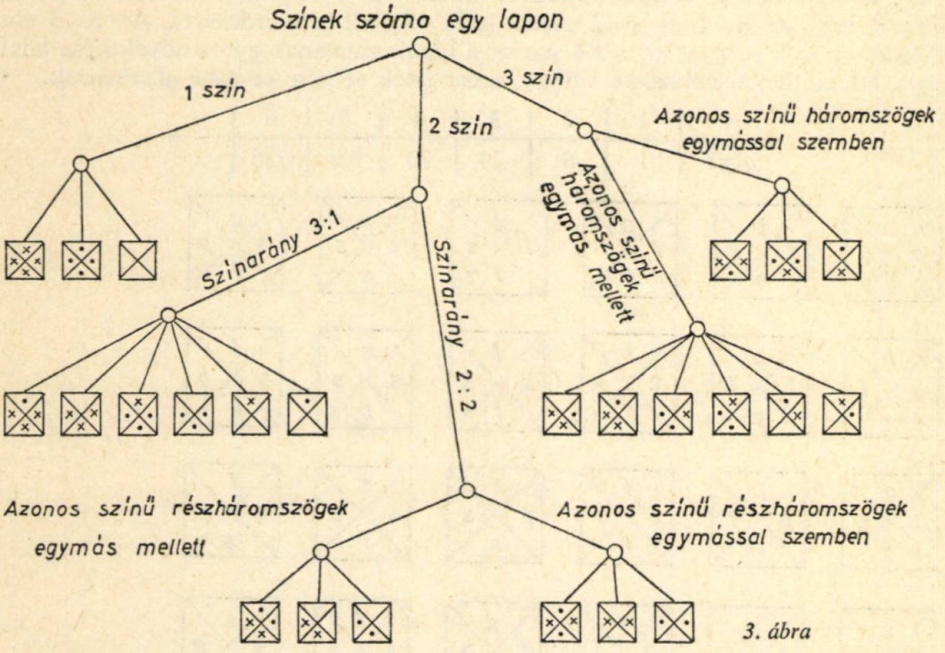
Például:

a) egy-, két-, háromszínűek stb., azaz a színek száma szerint,

b) pirosat nem tartalmazók, a lap negyede piros, a lap fele piros, több mint a fele piros, azaz a színek aránya szerint (3. ábra),

c) a lapok szimmetriatengelyeinek száma szerint.

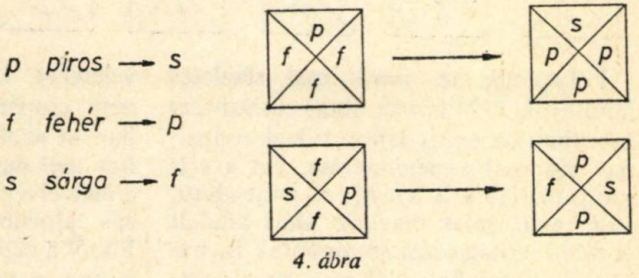
Például a három színnel különbözőképpen kiszínezhető quadrominó lapok



3. ábra

osztályozása elvégezhető az alábbi fagráf alapján.

Erről a fagráfról egyben a három színnel kiszínezhető különböző quadrominó lapok száma is leolvasható. Ilyen fagráfok készíthetők nemcsak három szín esetére is.



4. ábra

3. A már megtalált lapok színeinek permutálása (4. ábra).

A továbbiakban tételezzük fel, hogy n különböző szín áll a rendelkezésünkre, és határozzuk meg a különbözőképpen kiszínezhető quadrominó lapok számát!

A számlálást a 2.*d*)-pontban leírt szempont szerint végezzük kombinatorikus úton. Kezdjük azokkal a négyzetlapokkal, amelyeknek mind a négy részháromszöge az n különböző szín egyikével van kiszínezve. Nyilvánvalóan n ilyen

négyzet adódik. Tudjuk továbbá, hogy a pontosan kettő, három, illetve négy színt tartalmazó különböző lapok száma négy, kilenc illetve hat.

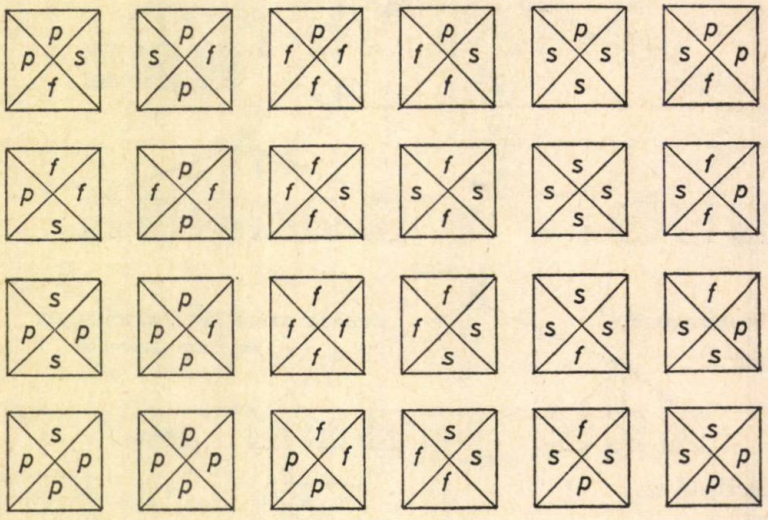
Most már csak azt kell tudnunk, hogy n különböző szín közül kettő, három, illetve négy szín pontosan $\binom{n}{2}$-, $\binom{n}{3}$-, illetve $\binom{n}{4}$-féleképpen választható ki. Így az n különböző színnel kiszínezhető különböző quadrominó lapok $q(n)$ számára a

$$q(n) = n+4\cdot\binom{n}{2}+9\cdot\binom{n}{3}+6\cdot\binom{n}{4} = \frac{n(n+1)(n^2-n+2)}{4}$$

összefüggés adódik.

Ha az első néhány értéket az alábbi táblázatba foglaljuk, akkor abból azonnal látható, hogy az $n=1$ és $n=2$ esetek játék céljából nem érdekesek. Az $n=3$ eset jól áttekinthető, viszont az $n\geqq 4$ esetek a lapok számának gyors növekedése miatt egyre áttekinthetetlenebbekké válnak, ezért játék céljára kevésbé alkalmasak.

n	1	2	3	4	5	6	...
$q(n)$	1	6	24	70	165	336	...



5. ábra

Folytassuk az $n=3$ eset részletes leírásával. A 24 lap (5. ábra) elkészítését követheti az egyes lapok tulajdonságainak alaposabb megismerése. Ezt a célt szolgálhatják a 2. *a)*, *b)*, *c)* pont alatti, vagy akár saját magunk által kitalált további osztályozási szempontok is, miközben ügyelnünk kell arra, hogy minden lap egy és csak egy osztályban forduljon elő, azaz az osztályozás teljes és egyértelmű legyen.

Ezen bevezető gyakorlatok természetesen előfeltételeznek, illetve elmélyítenek bizonyos logikai fogalmakat és műveleteket. Ugyanakkor próbára tehetik nem csupán a gyakorlatok elvégzőjét, hanem azok kitűzőjét is. Neki ugyanis úgy kell megadnia a feladatot, hogy az annak elvégzése során létrejövő osztályozás valóban teljes és egyértelmű legyen. Ebből a célból az osztályozás szempontjainak — vagyis a lapok tulajdonságainak — megjelölésekor a kitűzőnek ismernie kell a választ például az alábbi kérdésekre:

— Mely tulajdonságokból következnek mások?

— Mely tulajdonságoknak van meg az

a következménye, hogy egy másik nem teljesül?

— Van-e olyan lap, amely a megadott tulajdonsággal rendelkezik?

— Van-e olyan lap, amely minden megadott tulajdonsággal rendelkezik?

— Hogyan adható meg a tulajdonságoknak egy olyan rendszere, amelyből egyértelmű jellemzés adódik? Hány ilyen tulajdonság kell ehhez legalább?

Miután az egyes quadrominó lapok tulajdonságait részletesen megismertük, rátérhetünk nehezebb tevékenységi formákra. Ezek egyike tulajdonképpen már az 5. ábráról is leolvasható. Itt a 24 lapot úgy látjuk elhelyezve, hogy azok egymás mellé tolásával egy 4×6-os téglalap adódik. E téglalapon belül a szomszédos quadrominó lapok részháromszögei azonos színnel kapcsolódnak egymáshoz: ez a dominófeltétel. Ugyanezen téglalap oldalain a részháromszögek azonos színűek: ez a peremfeltétel. Az első játék tehát a következő lehet: A 24 lap mindegyikének egyszeri felhasználásával olyan 4×6-os téglalap kirakása, amelyre a dominó- és peremfeltétel egyidejűleg teljesül, miközben két téglalapot különbözőnek tekintünk, ha azok 180°-os elforgatással nem vihetők át egymásba. Kiszámították, hogy összesen 12 264 ilyen különböző téglalap van, amelyek egyidejűleg mindkét feltételnek eleget tesznek.

Néhány kezdeti próbálkozás után egy sor olyan tapasztalatra tehetünk szert, amelyek a játékot a továbbiakban felgyorsíthatják. Ilyenek például a következők:

— Egy kész téglalapból a színek permutálásával újabbak kaphatók.

— A peremszín megválasztása után az összerakás kezdődhet a téglalap oldalainak összeállításával. Minthogy a 24 lap közül 18 olyan van, amelyen a téglalap oldalaira választott peremszín előfordul, így az összerakandó téglalap oldalaira olyan quadrominó lapokat rakjunk, amelyeknek a téglalap belseje felöli részháromszögei a peremszíntől eltérő színezésűek. A belül mégis fellépő peremszint pedig az azt tartalmazó lapok közül kimaradó két lappal alkalmasan le kell kötni. Az összerakást a peremszínt nem tartalmazó lapok elhelyezésével folytathatjuk.

— A peremszínt tartalmazó lapok közül mindig kettő van a téglalap belsejében, de ezek egyike sem lehet a tisztán peremszínű lap: az mindig a téglalap valamelyik oldalán van (5. ábra).

— A téglalap sarkaira csak olyan lap rakható, amely legalább két szomszédos peremszínű részháromszöget tartalmaz. Összesen 7 ilyen lap van. Ezek közül legalább 6 helyezendő a téglalap oldalaira, azaz legfeljebb 1 lehet a téglalap belsejében. Megjegyezzük, hogy ezek az esetek elő is állíthatók.

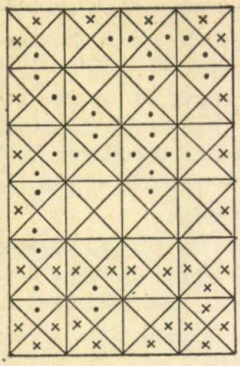
— Egy megoldást képező téglalap oldalainak kirakása után a kimaradó peremszínt tartalmazó két lap peremszínű részháromszögeinek le kell kötni egyrészt egymást, másrészt az oldalakon lévő lapok peremszínű részháromszögeit. Így a téglalap felső oldalától az alsóig terjedő peremszínű híd keletkezik. Minden megoldásban egy híd van. A hidat csak olyan lapok alkothatják, amelyek tartalmaznak átellenesen elhelyezkedő peremszínű részháromszögeket. A pontosan két átellenesen elhelyezkedő peremszínű részháromszöget tartalmazó három lap nem lehet egyidejűleg a téglalap oldalain, vagyis mindig előfordul-d.g előfordulnak a hídban.

— A téglalap oldalainak és a hídnak a megadása nem határozza meg egyértelműen a megoldást (6. ábra).

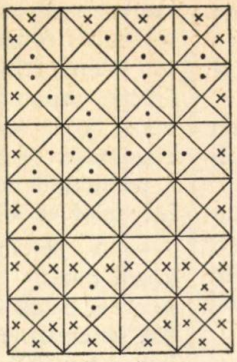
— A téglalap oldalai és a híd megadhatók úgy, hogy nem áll elő megoldás (7. ábra).

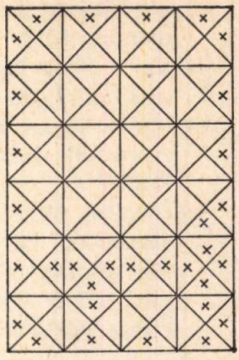
Mindezek alapján megmutatkozik, hogyan kell gazdaságosan eljárnunk, hogy valóban új megoldásokat nyerhessünk:

1. A három szín egyikét peremszínnek választjuk.



6. ábra





7. ábra

2. Olyan megoldásokra törekszünk, amelyekben:

— a híd a téglalap egyik felében van. Ezekből ugyanis alkalmas átrendezéssel kapható olyan megoldás, amikor a híd a téglalap másik felében van.

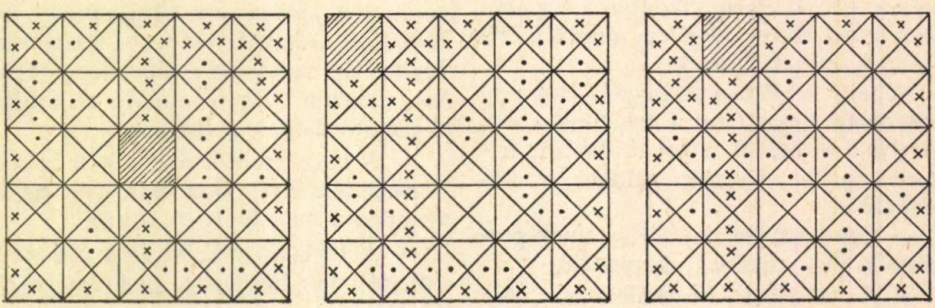
— a tisztán peremszínű lap a téglalap alsó felében van. Ezekből kapható olyan megoldás, amikor a tisztán peremszínű lap a téglalap felső felében van.

A 24 felbontása két valódi osztó szorzatára 2×12 és 3×8 is lehet. Ilyen típusú téglalapok összerakása mégis lehetetlen a dominó- és peremfeltétel egyidejű betartása mellett, mivel a 24 lap közül csak 18 olyan van, amelyen a téglalap oldalaira választott szín előfordul. 2×12-es téglalap esetén 24 ilyen lap kellene. 3×8-as téglalap esetén pedig mind a 18 ilyen lap kellene a téglalap oldalaira, így a belül fellépő peremszínű rézháromszögek nem lennének leköthetők, amint erről a kirakás egyszeri megkísérlése során könnyen meggyőződhetünk.

A 24 darab háromszínű quadrominó lappal a dominó- és peremfeltétel egyidejű betartása mellett további játékformák végezhetők. Hogy ne legyen mindenki csak a saját fantáziájára utalva, az alábbiakban — egy-egy megoldást bemutatva — ismertetünk néhányat.

— A 24 lapot egy olyan 5×5-ös négyzetté rakjuk össze, amely egy „lyuk"-at tartalmaz. A lyuk elhelyezkedését előírhatjuk: lehet a négyzet közepén, valamelyik oldalán vagy sarkán (8. ábra).

— A 24 lapot két egybevágó alak-



8. ábra

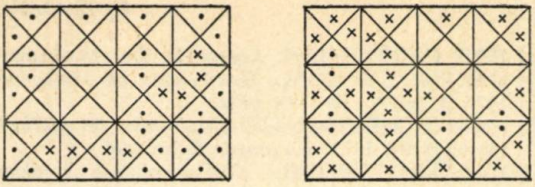
zattá rakjuk össze mindkét feltétel egyidejű betartásával. Az egyik alakzat széle lehet piros, a másiké például sárga. A két alakzat lehet aszimmetrikus, vagy akár szimmetrikus. Sőt megpróbálható két darab 3×4-es téglalap ilyen módon történő összerakása is. (9. ábra).

— Az előbbi mintára három egy-

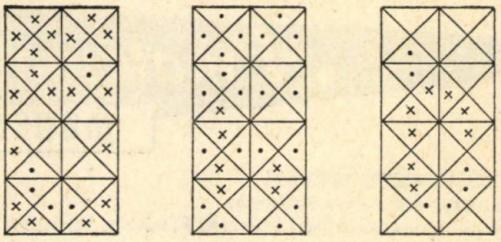
bevágó alakzat kirakása a feladat. Így most mindhárom alakzat peremszíne más. Elvégezhető három darab 2×4-es téglalap ilyenképpen való kirakása is (10. ábra).

— Csak a dominófeltétel megtartásával játszható a kerítéskészítés, amikor is a 24 lappal a sík minél nagyobb részének bekerítése a feladat.

A quadrominó játék $n=4$ és $n=5$ esetén már kevésbé áttekinthető. Viszont mindenképpen kihívást jelent ezen eseteknek az $n=3$ esethez hasonló vizsgálata. Összerakható-e például 7×10-es vagy 5×14-es téglalap a négyszínű, illetve 11×15-ös téglalap az ötszínű quadrominó lapokból a dominó- és peremfeltétel együttes betartásával? Ez a probléma túllépi ezen dolgozat kereteit, így a megoldást az olvasóra bízzuk.



9. ábra



10. ábra

Visszatérve a különböző quadrominó lapok megszámlálására, észrevehetjük, hogy az egy olyan színezési problémát jelent, amely az ismert Pólya-tétel alapján is megoldható. Ezt a megoldást a három szín esetére mutatjuk be.

A quadrominó lapokon a negyedrendű

$$G = \{(1)(2)(3)(4), (1234), (13)(24), (1432)\}$$

ciklikus csoport hat, amelyben a permutációk ciklushosszaiként az 1, 2 és 4 számok lehetségesek. Ezért a G csoport ciklusmutató polinomja

$$P(G\colon x_1, x_2, x_4) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{r_1(g)} \cdot x_2^{r_2(g)} \cdot x_4^{r_4(g)}$$

alakú, ahol $r_i(g)$ jelöli a g permutálás i hosszúságú ciklusainak számát, és x_i pedig az egyes ciklushosszhoz tartozó változó. Ezért a mi esetünkben $P(G\colon x_1, x_2, x_4) = \frac{1}{4}(x_1^4+x_2^2+2x_4^1)$. Ha a három különböző színre (mondjuk piros, fehér és sárga) bevezetjük a p, f, s változókat, akkor a Pólya-tétel szerint a $P(G\colon x_1, x_2, x_4)$ ciklusmutató polinomban x_1 helyére $(p+f+s)$-et, x_2 helyére $(p^2+f^2+s^2)$-et és x_4 helyére $(p^4+f^4+s^4)$-t helyettesítve és a kijelölt műveleteket elvégezve a $p^u f^v s^w$ tag együtthatója megadja azon quadrominó lapok számát, amelyen u számú piros, v számú fehér és w számú sárga részháromszög van. Ezért a

$$\begin{aligned} P(G\colon p,f,s) = {} & 1\cdot p^4+1\cdot p^2f+1\cdot p^3s+2\cdot p^2f^2+3\cdot p^2fs+2\cdot p^2s^2+ \\ & +1\cdot pf^3+3\cdot pf^2s+3\cdot pfs^2+1\cdot ps^3+1\cdot f^4+1\cdot f^3s+ \\ & +2\cdot f^2s^2+1\cdot fs^3+1\cdot s^4 \end{aligned}$$

polinom adódik, ahonnan a három különböző színnel kiszínezhető quadrominó lapok számát az együtthatók összege adja, ami éppen 24.

IRODALOM

[1] JENS CARSTENSEN: *Legespiele.* Der Mathematikunterricht, 1980, 2. szám, 5—36. oldal.
[2] HARTMUT SPIEGEL: *Quadromino im Mathematikunterricht I.* Didaktik der Mathematik, 1974, 2. szám, 139—148. oldal.
[3] JOCHEN ZIEGENBALG: *Quadromino im Mathematikunterricht II.* Beiträge zum Mathematikunterricht 1974, Hannover, Schroedel.
[4] HARTMUT SPIEGEL: *Zwei elementare Abzählungen der Quadrominosteine mit n Farben.* Praxis der Mathematik, 1981, 4. szám, 114—116. oldal.
[5] TOMESCU, I.: *Kombinatorika és alkalmazásai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
[6] BEREZNAI GYULA, VARECZA ÁRPÁD: *Egy versenyfeladat hátteréről.* Acta Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis Tom 9/1, 95—106. oldal.

A matematikatanítás MÓDSZERE

DR. FEKETE ISTVÁN
tanszékvezető főiskolai tanár
Bánki Donát Gépipari Műszaki Főiskola, Budapest

Jelölések és ábrázolások a műszaki főiskola matematika-számítástechnika tantárgyában

Az integrált tantárgyban olyan jelöléseket kellene használnunk, amelyek a két ős: az idősebb és kiforrottabb matematika, valamint a még mindig, sőt egyre inkább dinamikusan fejlődő számítástechnika számára elfogadhatók. „Elvileg" természetesen bármilyen fogalmat bármivel jelölhetünk, a jelölés megállapodás kérdése. De mivel ilyen megállapodások:

1. kisebb-nagyobb szakmai csoportokban kialakult szokások,
2. szabványok,
3. eszközök által kényszerített szabályok

már vannak, ezeket meg kell kísérelnünk betartani. E megállapodások vagy kényszerek vitatása helyett, de legalább vitatásuk előtt célszerű a megállapodások történeti-logikai alapjait megvizsgálni.

A jelölések kétségkívül egyfajta „gyorsírás" jelei, jelképek. Mint ilyenek, ha értelmüket vesztik, vagy csak megszokásból ragaszkodunk hozzájuk, bálványokká is válhatnak.

A jelölésekkel információt adunk, vagy kapunk. Az információk öt fajtáját különböztetjük meg [1]:

1. numerikus,
2. fizikai,
3. kötött alakú szöveg,
4. kötetlen szöveg,
5. formanyelven írt szöveg.

A hagyományos matematika főleg az utóbbi kettővel dolgozik, de természeténél fogva és különösen a számpéldák kidolgozásakor az elsőt sem mellőzheti. A műszaki főiskolai matematika—számítástechnika oktatásban, alkalmazási példákban a második is előkerül, és a harmadik is az ún. adatfeldolgozási feladatokban, elemi adatok rekordokká és rekordok adatfájlokká szervezésekor. Ha az elemi adat mátrixelem, akkor a rekord a mátrix egy sora, az összes rekord azonos oszlopban álló eleme pedig a mátrix egy oszlopát alkotja. A mátrix az adatfile; technikailag nem jelentéktelen, de akkor is csak részletkérdés, hogy az igazgatási, ügyviteli, pénzügyi tranzakciókkal kapcsolatos adatfájlokban numerikus és kötött szövegű információk általában keverten lépnek fel. A hagyományos matematika tehát már

az információnak mind az öt fajtáját használja, bár nem egyenlő mértékben.

1. Az indexes változók jelölése

A rekord sorvektorként, az azonos rendeltetésű mezők halmaza pedig oszlopvektorként fogható fel. Az egyes mezőkön álló elemi adatok vektor komponensei, vagy sorozat elemei. Számítástechnikai kezelés, számítógépi tárolás szempontjából a fizikai vektor komponenseinek számértéke és a számsorozat elemei között semmilyen különbség nincsen. „Indexes változó" akár az egyik, akár a másik. Az indexes változó azonban, ha úgy tetszik, függvény helyettesítési értéke, [2]. Az

$$a\colon I \to A$$

függvény az I indexhalmazt az A értékhalmazba viszi át. Az a függvény értelmezési tartománya a természetes számok halmaza: $D(a)=\mathbf{N}$; értékkészletét a változó előforduló értékei határozzák meg. Az indexes változónak a számítógép-programozásban használatos $a(i)$ jelölése tehát nemcsak a számítógép mint eszköz által parancsolt kényszer, hanem a hagyományos a_i jellel szemben logikus is. A mátrixindexezés így a kétváltozós függvény jelének felel meg. A megfelelő mátrixelem-jel $a(i,j)$, mivel

$$a\colon I\times J \to A$$

skalárértékű vektorfüggvény.

2. A változó fogalma

A hagyományos matematikában megszoktuk, hogy pl. az

$$f(x)=\frac{x^2}{x+a}$$

képletben x változó, az a szám viszont állandó, feltéve, hogy ez a képlet az „egyváltozós függvények" címszó alatt szerepel. Ha a fejezet címe „kétváltozós függvények", akkor ugyanabban az értékadó utasításban:

$$f(x,a)=\frac{x^2}{x+a}$$

már a is változó. A számítógép-programozás szempontjából viszont x is, a is változó, tekintet nélkül a hagyományos matematika állandó—változó fogalompárjára, mivel mind az x, mind az a tárterületet azonosít, amelyen a számítógép numerikus információt tárol. „Minden olyan értelem, amit a számokhoz rendelünk, a számítógépen kívül marad, a használó kezében. Ez természetesen nem veszélytelen, ..." [1].

3. Paraméteres függvénymegadás

A síkgörbe egyik igen természetes, sok szempontból legtermészetesebb származtatása az, amikor a vonal egy mozgó pont pályájaként jött létre, [2]. Ekkor a vonal egyenletét két függvénnyel adjuk meg:

$$x(t) \quad \text{és} \quad y(t)$$

alakban, ahol t a paraméter, amelynek fizikai jelentése legtermészetesebben az idő. A paraméter fogalma azonban a matematikában általánosul, és amikor paraméteres függvénymegadásról beszélünk, az absztraktumhoz nem mindig rendelünk vagy gondolunk hozzá konkrétumot. Ezzel szemben a paraméter szerepét az egyik függvény helyettesítési értékhalmaza is játszhatja, hiszen pl.

$$x=t \quad \text{és} \quad y=t^2$$

esetében egyszerűbb, ha az

$$y=x^2$$

kifejezéssel élünk. A görbe leggyakrabban előforduló $y=f(x)$ egyenletét tehát a paraméteres megadás különleges esetének tekinthetjük. Még természetesebben tesszük ezt polárkoordináták használatakor

$$r=r(\varphi)$$

alakban, ahol az ezen egyenlettel leírt pályán mozgás közben múló időre az óramutató φ szögelfordulása emlékeztet.

4. Koordináta-rendszerek

Ez utóbbi példa figyelmünket esetleg az ábrázolásokra fordítja. Tudjuk, hogy

az absztrakt matematikai fogalmak logikai egységbe foglalhatók, rajzos szemléltetés nélkül is. A koordináta-rendszerek csak a matematikai és geometriai fogalmak egymáshoz rendelésére szolgálnak és céljuk geometriai problémák aritmetizálása akár az absztrakt hagyományos, akár a numerikus gépi matematika részére, vagy pedig szemlélethez szokott természetünk számára a matematikai fogalmak és összefüggéseik átlátásának könnyítése.

Van azonban a kialakult és lépten-nyomon csak a Descartes-koordináta-rendszert használó beidegzettségünknek egy veszélye is. Különösen a kezdő, tehát a diák az absztrakt matematikai fogalmat a megfelelő geometriai képpel azonosítja. Például az

$$f(x) = \text{állandó}$$

kifejezésről a legtöbb kezdőnek bizonyosan csak az x tengellyel párhuzamos egyenes képe jut eszébe, pedig lehet, hogy körről van szó, ha x nem távolságot, hanem szögelfordulást, és $f(x)$ nem rögzített irányú távolságot, hanem csak adott pólustól mért távolságot jelent.

Azt pedig, hogy az egyváltozós függvény deriváltjának geometriailag az érintő iránytangense felel meg, megint csak Descartes-koordinátákban állíthatjuk és bizonyíthatjuk.

A számítógépek, illetve periferiális egységeik is a megszokott Descartes-koordinátákkal programozhatók legegyszerűbben. Ha más koordinátákban akarunk gondolkozni és dolgozni, akkor a programozás a legtöbb számítógép és programozási nyelv esetében bonyolultabb lesz.

Mindezek ellenére a matematikai-számítástechnikai ismeretek oktatásakor a geometriai értelmezések körében célszerű a Descartes, polár- stb. koordináta-rendszerekbeli tárgyalást nem külön-külön fejezetbe sorolni, hanem az absztraktumok szemléltetéseképpen egymással párhuzamosan bemutatni. Így a szemlélettől a matematikába elvonatkoztatás ténye is feltűnőbb lesz.

5. Egy technikai „kényszer", amely nem rosszabb a „szabadságnál"

Az indexeléshez hasonlóan néhány függvény jelének megváltoztatására a számítógép kényszerít, mivel nem tűri a gépírásbeli félsoremeléseket és süllyesztéseket. Az

e^x helyett $\exp(x)$ használata

pl. már a hagyományos matematikai és fizikai-technikai szakirodalomban is szokásos volt. Továbbá

$\sin x$ helyett $\sin(x)$

csak egy zárójel-többletet jelent, de megtartja az általános $f(x)$ jelkép szerkezetét.

Ha pedig

$\sqrt{x}$ helyett SQRT(x) vagy SQR(x), vagy FSQT(x)

kerül a szövegbe vagy a formanyelvi kifejezésbe, csupán egy kicsit több karaktert írunk, de a régi matematikai jelképtől a gépi számítástechnikai és kötetlen szöveges kifejezések felé lépünk, szintén az általános függvény-jelkép megtartásával. Azután:

$\log_2 x$ helyett $\log(x)/\log(2)$

írásával pedig egy kiszámítási utasítást (egylépéses szekvenciális algoritmust) juttatunk kifejezésre.

Végül még egy érv, amely már nem szűken „szakmai", hanem írástechnikai. A félsoremelések és süllyesztések kirekesztésével gépíró munkatársaink idegrendszerét is kíméljük.

Mindezek ellenére a közelmúltban megírt könyvemben még nem tértem át a számítástechnikához idomított jelképrendszer kizárólagos használatára. Valószínű, hogy a szokás és a technikai újítás együttélése (szimbiózisa) még soká tart. Gondoljunk pl. a Whithworth és a metrikus csavarmenet több évtizedes együttélésére. A matematikai-számítástechnikai jelképrendszer esetében a probléma kétségkívül kevésbé jelentős, hiszen csak szoftverről, nem gyártott és beépített hardverről van szó.

6. A matematika nyitottságának kérdése

A felsorolt példákkal azt szerettem volna érzékeltetni, hogy a matematikai modelleket nyitottá kell tenni

1. az alkalmazások,
2. a szemléltetés,
3. a kiszámítás technikája

felé. Mindezek a nyitások a matematikai ismeretek gyakorlattá fordíthatóságát (konvertibilitását) szolgálják, a matematika kialakult logikai felépítésének és egységének pedig aligha ártanak.

IRODALOM

[1] PETER GOLDSCHNEIDER—HEINZ ZEMANEK: *A számítógép az információfeldolgozás eszköze*. Statisztikai Kiadó, Budapest, 1975.

[2] CSÁSZÁR ÁKOS: *Valós analízis I.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[3] FEKETE ISTVÁN: Matematika és Számítástechnika (BDGMF jegyzet) Műszaki Könyvkiadó, Budapest, megjelenés alatt.

FITOS LÁSZLÓ
ny. főiskolai docens
Esztergom

A négyzetgyökös közép és alkalmazása csonkagúlára

Ebben a cikkben a négyzetgyökös közép értelmezéséről, a többi közép között elfoglalt helyéről és alkalmazásként a csonkagúla középmetszetéről lesz szó.

1. *Definíció:* Az $a_i \geqq 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ valós számok négyzetgyökei számtani közepének négyzetét, vagyis a

$$\left(\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}}{n}\right)^2$$

számértéket az a_i számok *négyzetgyökös közepének* fogjuk nevezni. Az elnevezés összhangban van a négyzetes közép elnevezéssel, ugyanis a négyzetes közép adott nem negatív valós számok négyzetei számtani közepének négyzetgyöke. Mindkét középérték, valamint a számtani és a harmonikus közép is az ún. *hatványközép* speciális esete. Az $a_i > 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ valós számok *hatványközepe*:

$$\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\ldots+a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}.$$

Ebből $\alpha=1$ esetén a számtani közép, $\alpha=2$ esetén a négyzetes közép, $\alpha=\frac{1}{2}$ esetén a négyzetgyökös közép és $\alpha=-1$ esetén a harmonikus közép adódik. (Lásd *Korovkin: Egyenlőtlenségek*. Középiskolai szakköri füzet, Budapest, 1983. 18. oldal!)

2. Rögtön fölvetődik a kérdés, hogy a négyzetgyökös közép a többi középérték nagyság szerinti sorozatában hol foglal helyet. Bebizonyítjuk, hogy érvényes a következő tétel.

Tétel: Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok négyzetgyökös közepe e számok mértani és számtani közepe közé esik, azaz

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \left(\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}}{n}\right)^2 \leqq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}. \tag{1}$$

Bizonyítás: Vegyük (1) pozitív négyzetgyökét! Mivel nagyobb pozitív valós szám pozitív négyzetgyöke nagyobb, mint kisebb pozitív valós számé, ezért (1)-ből négyzetgyökvonással az adódik, hogy

$$\sqrt[n]{\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\ldots\sqrt{a_n}} \leqq \frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}}{n} \leqq \sqrt{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}}. \tag{2}$$

Ez pedig nem egyéb, mint a $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}$ pozitív számok mértani, számtani és négyzetes közepe között fennálló ismert összefüggés. Tehát (2) igaz és így (1) is az, mert a végzett művelet egyértelműen megfordítható. Az egyenlőségjel csak akkor érvényes, ha

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n.$$

Megjegyzés: Ha a hatványközép képletében az $\alpha = -1, \frac{1}{2}, 1, 2$ értékeknek megfelelő középértékek nagyságbeli sorrendjét megfigyeljük, észrevesszük, hogy azok is szigorúan monoton növekedő sorrendben következnek. Ebből azt sejtjük, hogy α növekedésével az α-hoz tartozó hatványközép értéke is nő. Ennek bizonyítása szintén megtalálható *Korovkin: Egyenlőtlenségek* c. szakköri füzetben (30—32. oldal).

3. A négyzetgyökös közép fontos szerepet játszik a csonkagúláknál, ugyanis a csonkagúla középmetszetének területe (k) az alap- és fedőlapterület (T és t) négyzetgyökös közepével egyenlő, azaz

$$k = \left(\frac{\sqrt{T}+\sqrt{t}}{2}\right)^2.$$

(A csonkagúla középmetszete olyan alaplappal párhuzamos síkmetszet, amely az alap- és fedőlaptól egyenlő távolságra van.)

Bizonyítás: Egy tetszőleges csonkagúla (akárhány oldalú és nem szabályos is lehet) alap- és fedőlapja, valamint a középmetszete hasonló síkidomok. Ezért ha e három síkidom egy-egy megfelelő oldalának hosszúságát rendre a-val, b-vel, c-vel jelöljük, akkor érvényes, hogy

$$T:t:k = a^2:b^2:c^2.$$

Ebből négyzetgyökvonással

$$\sqrt{T}:\sqrt{t}:\sqrt{k} = a:b:c,$$

vagyis

$$\sqrt{T} = \lambda a, \quad \sqrt{t} = \lambda b, \quad \sqrt{k} = \lambda c \quad (\lambda > 0) \tag{3}$$

adódik. Mivel pedig a középmetszet felezi a csonkagúla oldaléleit, azért a középmetszet oldala

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Ennek λ-szorosa

$$\lambda c = \frac{\lambda a + \lambda b}{2},$$

amiből (3) alapján

$$\sqrt{k} = \frac{\sqrt{T}+\sqrt{t}}{2}, \quad \text{azaz} \quad k = \left(\frac{\sqrt{T}+\sqrt{t}}{2}\right)^2, \tag{4}$$

amint azt állítottuk. (Szabályos négyoldalú csonkagúla esetén $\lambda=1$)

(4) levezethető oly módon is, hogy a csonkagúla térfogatát egyenlővé tesszük a középmetszet által létrehozott két rész térfogatának összegével és az így kapott egyenletből a középmetszet területét kiszámítjuk. Eszerint

$$\frac{m}{3}(T+\sqrt{Tt}+t) = \frac{m}{6}(T+\sqrt{Tk}+k)+\frac{m}{6}(k+\sqrt{kt}+t),$$

ahol m a csonkagúla magassága. Egyszerűsítés és rendezés után a

$$2k+(\sqrt{T}+\sqrt{t})\sqrt{k}-(\sqrt{T}+\sqrt{t})^2 = 0$$

egyenletet kapjuk, aminek pozitív gyöke (a negatív gyök ugyanis feladatunk szempontjából értelmetlen):

$$\sqrt{k} = \frac{\sqrt{T}+\sqrt{t}}{2}, \quad \text{vagyis} \quad k = \left(\frac{\sqrt{T}+\sqrt{t}}{2}\right)^2.$$

Végül megmutatjuk, hogy két különböző pozitív szám (a és b) négyzetgyökös közepe a két szám számtani és mértani közepének számtani közepe. A bizonyítás egyszerű, ugyanis

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 = \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}}{2}.$$

Ezt az összefüggést a csonkagúla középmetszetére alkalmazva kimondhatjuk, hogy bármely csonkagúla középmetszetének területe az alap- és fedőlapterület számtani és mértani közepének számtani közepe.

NASZÁDI GÁBOR
középiskolai tanár
Budapest

Trinomiális együtthatók a Pascal-típusú tetraéderben

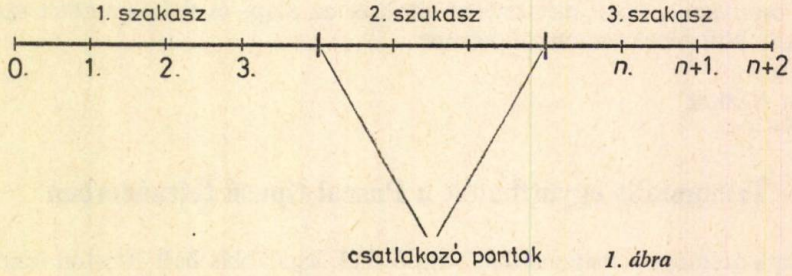
Minden középfokon matematikát tanuló diák legalábbis hall Newton binomiális tételéről, valamint ehhez kapcsolódóan a Pascal-háromszögről. Ezért talán nem túlzott az a feltételezés, hogy nemkevesük fejében megfordul ennek általánosítási lehetősége, a polinomiális együtthatók. Márcsak azért is, mert előbb-utóbb majdnem mindegyikük szembetalálja magát legalább egy három tagú összeg négyzetének kiszámításával. Azt tudom, hogy mint tananyag csak a legmagasabb szinten tanulók (mat. spec.) találkoznak a polinomiális együtthatókkal, mégis mivel ez a témakör az általánosítások kimeríthetetlen tárházát kínálja, több figyelmet érdemel az általános matematikaoktatásban is. Ezt látszik igazolni az is, hogy az itt leírásra kerülő trinomiális együtthatók már több, a matematikával szemben rezisztens diák érdeklődését is felkeltette. Lássuk tehát közelebbről! Ha a trinomiális együtthatókat a binomiális együtthatók kiszámításakor is alkalmazott kombinatorikai módszerrel akarjuk megkapni, akkor a következő probléma áll előttünk: Az

$$(a+b+c)\cdot(a+b+c)\ldots(a+b+c)$$

szorzat zárójeleinek felbontásakor mik lesznek az $a^k b^l c^m$ szorzatok együtthatói? Ahol $k<n$, $l<n$, $m<n$ valamint $k+l+m=n$. Ha az összesen rendelkezésemre álló n döntésemből (hogy melyik zárójelből melyik elemet válasszam) k-szor a-t választottam, úgy ezt $\binom{n}{k}$-féleképp tehetem meg. Ugyanígy a maradék $(n-k)$ döntési lehetőségemből l-szer b-t $\binom{n-k}{l}$-féleképp, illetve m-szer c-t $\binom{n-k-l}{m}$-féleképp választhatók. Ezért $a^k b^l c^m$ együtthatója: $\binom{n}{k}\binom{n-k}{l}\binom{n-k-l}{m}$. Mivel $k+l+m=n$, ezért: $\binom{n-k-l}{m}=\binom{m}{m}=1$. A következő felmerülő kérdés: Hány darab ilyen $a^k b^l c^m$-alakú, háromtényezős szorzatot kell a felbontás végeztével összeadni? Nyilván annyit ahány különböző (k, l, m) sorozat képezhető, ha $k+l+m=n$ és persze két sorozat már akkor is különböző, ha csak a tényezők sorrendje más. Hiszen pl.: $a^2 b^1 c^1 \neq a^1 b^2 c^1$.

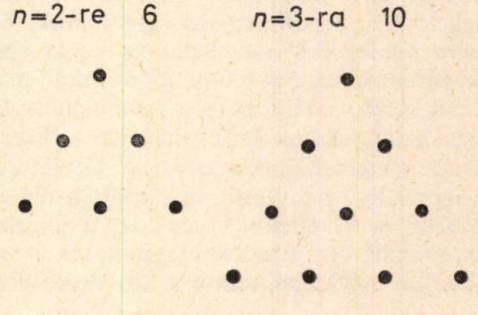
Azaz n hány — a fent leírt módon — különbözőképp áll elő három egész szám összegeként? Hogy az előállításokból a 0-t kizárjuk: $k'=k+1$, $L'=L+1$, $m'=m+1$ megfeleltetést végezzük el. Eredeti problémánk most a következő alakot ölti: $k'+L'+m'=n+3$. Azaz $n+3$ hányféleképp áll elő 3 pozitív egész összegeként? Könnyen igazolható, hogy eredeti feladatunk és annak ilyen formán történt átfogalmazásának megoldásai közt kölcsönösen egyértelmű kapcsolat áll fenn, tehát számuk megegyezik.

Képzeljük magunk elé a számegyenes 0-tól $(n+3)$-ig terjedő részét! Ha $(n+3)$-at 3 egész hosszúságú szakaszból szeretném összeilleszteni, ezt nyilván annyiféleképp tehetem meg, ahányféleképp az $n+3-1$ darab egész koordinátájú belső pont közül ki tudom választani az összetevő 3 szakasz 2 közös „csatlakozó" pontját. (1. ábra).



1. ábra

Ennek megoldása és így egyben a trinomiális együtthatók száma: $\binom{n+2}{2}$. Azt hiszem csak így „utólag" világos igazán, hogy miért volt szükség a fenti megfeleltetésre, azaz a 0 hosszúságú szakasz kizárására. Mint tudjuk, $\binom{n+2}{2}=k$. Tehát a trinomiális együtthatók száma pont annyi, mint a Pascal-háromszög n. soráig a benne szereplő összes elem száma. Pl.:



2. ábra

Ez nyilvánvaló is, hiszen a következő sorral mindig $n+1$ elem adódik a már meglevőekhez, teljes összhangban a k képletünkkel. Ez és a következő azonosság ébresztette bennem azt az ötletet, hogy a trinomiális együtthatók egy Pascal-típusú tetraéder megfelelő síkmetszeteiből olvashatók ki.

Sejtés: A Pascal-típusú tetraéder tetszőleges eleme a „felette" levő 3 összege. A „felette" kifejezés teljesen analóg a síkbeli esettel. Ott a kiszemelt elemből (mint pontból) párhuzamosokat húztunk a háromszög oldalaival, és amelyik elemeknél metszette ez a két egyenes a felette levő sort, azokat neveztük; felette levőknek.

A térben a síkbeli esetnek megfelelően, a kiszemelt elemből a tetraéder 3 élével húzok párhuzamost, és természetesen a felette levő síkkal vett metszéspontjaikat tekintem „felette" levő elemeknek.

A sejtést bizonyítsuk általánosan!

$a^K b^L c^M$ szorzat trinomiális együtthatója az előzőek szerint: $\binom{N}{K}\binom{N-K}{L}$. Mivel $\binom{N}{K}=\binom{N}{N-K}$, ezért az együttható ilyen alakban is írható: $\binom{N}{X}\binom{X}{L}$, ahol $X=N-K$.

Állítás:

$$\binom{N}{X}\binom{X}{L}=\binom{N-1}{X-1}\binom{X-1}{L-1}+\binom{N-1}{X-1}\binom{X-1}{L}+\binom{N-1}{X}\binom{X}{L}.$$

A felette levő elemek

Bizonyítás:

$$\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\cdot\frac{X!}{(X-L)!\,L!}=\frac{(n-1)!}{[n-1-(X-1)]!\,(X-1)!}\cdot\frac{(X-1)!}{[X-1-(L-1)]!\,(L-1)!}+$$

$$+\frac{(n-1)!}{[n-1-(X-1)]!\,(X-1)!}\cdot\frac{(X-1)!}{(X-1-L)!\,L!}+$$

$$+\frac{(n-1)!}{(n-1-X)!\,X!}\cdot\frac{X!}{(X-L)!\,L!}\quad\Big|\cdot(n-X)!$$

$$\frac{n!}{(X-L)!\,L!}=\frac{(n-1)!}{(X-L)!\,(L-1)!}+\frac{(n-1)!}{(X-L-1)!\,L!}+\frac{(n-1)!\,(n-x)}{(X-L)!\,L!}\quad\Big|\cdot(X-L)!\,L!$$

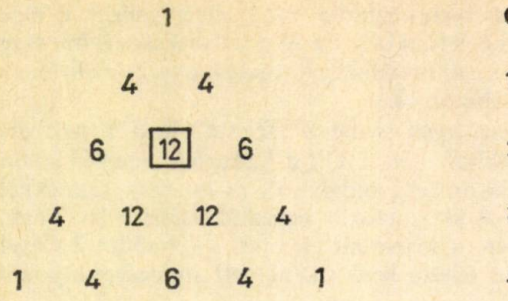
$$n!=(n-1)!\,L+(n-1)!\,(X-L)+(n-1)!\,(n-X),$$

$$n!=(n-1)!\,(\underbrace{L+X-L+n-X}_{n}).$$

Ezzel tehát igazoltuk a Pascal-típusú tetraéderről szóló sejtést is, mert a trinomiális együtthatóknak mind a számuk, mind a fent bizonyított tulajdonságuk lehetővé teszik azt, hogy egy tetraéder síkmetszeteiből (melyek hasonlítanak a jól ismert Pascal-háromszöghöz) olvassuk ki őket. Tehát a tetraéder a borítón levő ábra szerint néz ki (3. ábra).

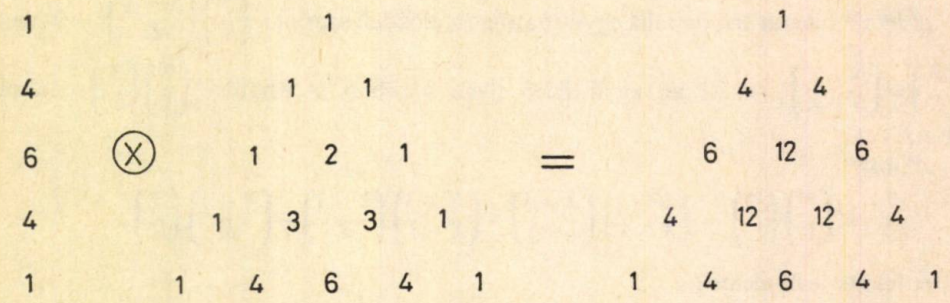
Például: $(a+b+c)^4$ trinom. együtthatói e tetraéder 4. síkmetszetéből olvashatók ki, ahol minden elem a felette levő (3. síkmetszetbeli) 3 elem összegeként áll elő.

Pl.: $a^2b^1c^1$ együtthatója: $K=2$, $L=1$, $M=1$, $N-K=X=2$, $\binom{N}{X}\binom{X}{L}$ X. sor L. elem$=12$.



4. ábra

Az együtthatók $\binom{N}{X}\binom{X}{L}$-alakú konstrukciója szinte sugallja a síkmetszet elemeinek egy még egyszerűbb, térszemléletet nem igénylő előállítását. Írjuk le függőlegesen a Pascal-háromszög *n*. sorát (jelen esetben $n=4$), majd rajzoljuk mellé a Pascalháromszöget az *n*. sorig bezárólag! (5. ábra.)

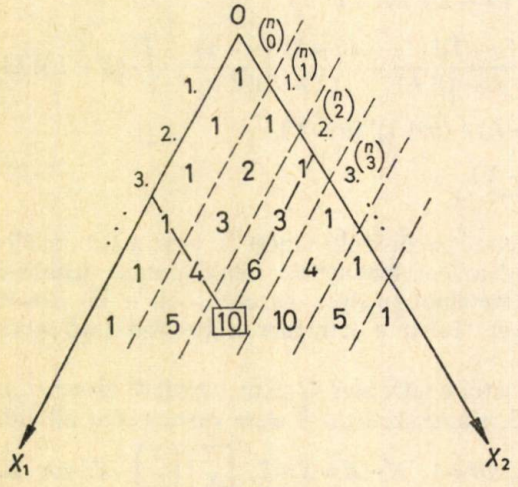


5. ábra

Szorozzuk össze az egy sorban álló elemeket, majd az eredményt Pascal-háromszög alakban írjuk le és máris megkapjuk az *n*. síkmetszet elemeit! A bizonyítás a konstrukcióból nyilvánvaló.

A bi-, illetve a trinomiális együtthatók tanulmányozása során egy újabb általánosítási lehetőség merült fel. Tekintsük a jólismert Pascal-háromszöget!

Ha a háromszög csúcspontját origónak, 2 élét pedig koordinátatengelyeknek tekintem, akkor ebben a nem feltétlenül derékszögű koordináta-rendszerben a „10"-es pont koordinátái: $X_1=3$, $X_2=2$.

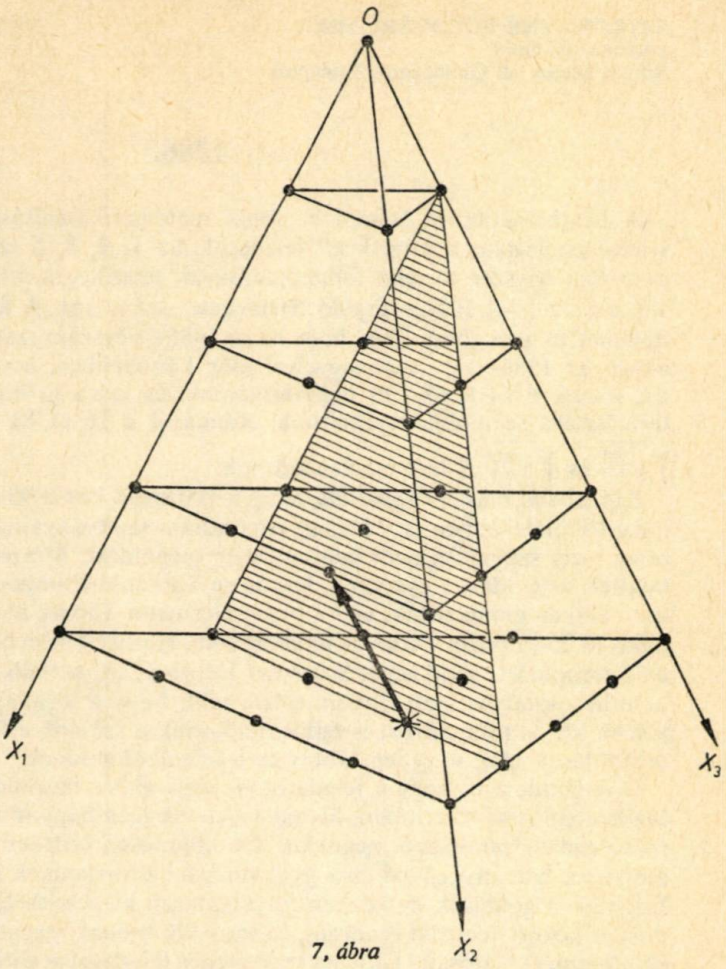


6. ábra.

Könnyen látható, hogy ha a kérdéses elem az *N*. sor *K*. (balról) eleme $X_1=N-K, X_2=K$. Mivel $\binom{N}{K}=\frac{(N-K+K)!}{(N-K)!\,K!}$, ezért $\binom{N}{K}=\frac{(X_1+X_2)!}{X_1!\,X_2!}$. Tehát a binomiális együtthatók ilyen alakban írhatók fel ebben a koordináta-rendszerben.

Most lépjünk ki a térbe és vizsgáljuk meg, hogy a trinomiális együtthatók hogyan írhatók fel koordinátáik segítségével! (3. ábra.) Ha pl.: $X_3=0$, akkor mivel az $[X_1X_2]$-sík

egy Pascal-háromszög a koordinátázás ugyanúgy megy mint az előbb. Tehát $X_1=N-K$, $X_2=K$, ha a szóban forgó elem az N. síkmetszet (balról) K. tagja. Ha az N. síkmetszet többi elemére is kíváncsiak vagyunk, akkor lépjünk először egy sorral „feljebb"! Így arra a síkra érkezünk, amelynek egyenlete $X_3=1$ (az ábrán vonalkázva). Így pl.: a „ "-al jelölt elem 3. koordinátája biztosan 1 lesz, mert tartalmazza az $X_3=1$ egyenletű sík. 1. és 2. koordinátáit úgy nyerhetem, ha az X_3 tengellyel párhuzamosan levetítem az $[X_1X_2]$-síkra. Az így kapott vetületpont 1. koordinátája 1-gyel kevesebb, mint a vizsgált elemé, hiszen a vetítés az $N-1$. síkmetszetre vitt. (Az ábrán a 3.) K s így X_2 értéke a vetítés során nem változott, mert balra nem léptünk a vetítéskor. Így $X_1=N-K-1$, $X_2=K$, $X_3=1$.



7. ábra

Könnyen látható, ha nem 1-gyel, hanem L-lel lépünk „felfelé": $X_1=N-K-L$, $X_2=K$, $X_3=L$.

Ha visszaemlékszünk $a^Kb^Lc^M$ trinomiális együtthatójára, valamint figyelembe vesszük, hogy $N-K-L=X_1=M$, akkor

$$\binom{N}{N-K}\binom{N-K}{L}=\frac{N!}{K!\,L!\,M!}=\frac{(X_1+X_2+X_3)!}{X_1!\,X_2!\,X_3!},$$

tehát sikerült a trinomiális együtthatókat a binomiálisokhoz hasonló koordinátáiban szimmetrikus szép, könnyen megjegyezhető alakban felírni.

Joggal kérdezhetné ezekután bárki, hogy miért állunk meg, miért nem visszük tovább az általánosítást, hiszen már mindenki sejtheti a polinomiális együtthatók N-dimenziós koordinátái segítségével nyerhető általános formulát.

Úgy gondolom azonban, hogy kedvcsinálónak ennyi is épp elég egy középiskolás számára, ráadásul a 4. dimenzióba kilépve megszűnnek azok a geometriai szemléltetési lehetőségek, melyekre én mindvégig támaszkodtam és a tanulóknak is biztos fogódzók.

SZTRÓKAYNÉ FÖLDVÁRI VERA
középiskolai tanár
Szinyei Merse Pál Gimnázium, Budapest

1986.

A Mathematics in School c. angol matematikatanítási folyóirat egyik 1985-ös számában láttam a következő feladatot: az 1, 9, 8, 5 számjegyek mindegyikének pontosan egyszer történő felhasználásával, tetszőleges műveletek segítségével állítsuk elő az 1-től 100-ig terjedő természetes számokat. A feladat felkeltette érdeklődésemet, és arra gondoltam, hogy ha az 1985-ös évszám számjegyeivel ez megoldható, akkor az 1986-os év számjegyeivel még könnyebben, hiszen itt a 9, 16, 169, 196, 81, 9+16, 6.8+1, 68—19 négyzetszámok, és így a gyökjel felhasználásával újabb természetes számokhoz juthatunk. Ráadásul a 16 és 81 negyedik hatványok, így $\sqrt{\sqrt{16}}$ és $\sqrt{\sqrt{81}}$ is természetes számok.

Körülbelül másfél órába telt, amíg a 100 szám közül 93 előállítása sikerült, némelyiké többféleképpen is. Másnap elmondtam tanítványaimnak a feladatot, és azt is, hogy mely számokra nem találtam még megoldást. Másnapra a hiányzó 7-ből 6-ra találtak megoldást a gyerekek. Háromra Tárkányi Csongor, kettőre Schreiner Dénes harmadikos gimnazisták, egyre pedig Hermann Tamás, aki hetedikes, az utolsóként hiányzó 26-ra pedig főiskolás tanítványom, Huszár Endre hozta a „sg" jelet is felhasználó megoldást, majd ismét Schreiner Dénes a „sg" nélküli másikat. Rimóczy Gábor, hatodik osztályos tanítványom ötlete volt, hogy a legnagyobb közös osztót és legkisebb közös többszöröst is felhasználhatjuk a számok előállítására, az ilyen típusú megoldások tőle, vagy legalábbis az ő ötletéből erednek.

Úgy gondolom, hogy a feladatot — vagy ehhez hasonló feladatokat — már alsó tagozatban is ki lehet tűzni, hiszen a számok igen nagy részéhez található csak alapműveleteket tartalmazó megoldás. De különösen érdekes lehet hetedik osztályban, amikor a hatványozással és a gyökvonással ismerkednek a gyerekek, így az esetleg hiányzó megoldások év közben folyamatosan kiegészíthetők. Lehet egyének és csoportok között versenyt rendezni, ki vagy kik tudnak megadott idő alatt több számot előállítani, és biztosan ki is lehet terjeszteni a feladatot negatív számokra, törtekre vagy 100-nál nagyobb számokra. Jövőre azután megint új feladat áll előttünk. Jó szórakozást hozzá idén és a későbbiekben! De mi lesz 2000-ben?

$1 = 9+8-16 = (9-8)^{16} = 1^{986} = 6^{\sqrt{81}-9}$,

$2 = 8:(1+9-6) = \sqrt{9-1}\cdot\sqrt{8}-6$,

$3 = 6:(18:9) = 9:(81;6)$,

$4 = 8+6-9-1 = \sqrt{16}\cdot\sqrt{9}-8 = \log_{9-6} 81$,

$5 = 19-8-6 = (9+1):(8-6) = 91-86 = \sqrt{169}-8 = [8;6]-19$,

$6 = 9+6-8-1 = 6^{9-8}\cdot 1 = \sqrt{\frac{9}{16}}\cdot 8 = \sqrt{196}-8 = \sqrt{9-1}-\sqrt{8}+6 = 18:(9;6)$,

$7 = 1^{9-8}+6 = \sqrt{68-19} = \sqrt{6\cdot 8+1^9} = [16;8]-9 = (9+6-8)\cdot 1$,

$8 = 9+6-8+1 = \sqrt{16}^{\sqrt{9}}:(8\cdot 1)$,

$9 = 9^{8-6-1} = 9\cdot 1^{86}$,

$10 = 9+8-6-1 = 1^{8-6}+9 = 8-\sqrt{9}+6-1 = \frac{6!}{9}:\frac{8}{1}$,

$11 = (9+8-6)\cdot 1 = (6;8)+[1;9] = 8-\sqrt{9}+6\cdot 1 = 96:8-1$,

$12 = 9+8-6+1 = (18:9)\cdot 6 =$

$= (96:8)\cdot 1 = (81;6)+9 = 8-\sqrt{9}+6+1,$

$13 = 96:8+1,$

$14 = 98:(6+1) = \sqrt{9-1}\cdot\sqrt{8}+6,$

$15 = 16-9+8 = (81+9):6 = 96-81 =$

$= 16-(8;9) = 18-(9;6),$

$16 = 16^{9-8} = \sqrt{6\cdot 8+1}+9 = (8;9)\cdot 16,$

$17 = 9\cdot(8-6)-1 = 19-(6;8) = (16;8)+9 =$

$= (8;9)+16,$

$18 = (16:8)\cdot 9 = (6;8)\cdot[1:9] = (8-6)\cdot 9\cdot 1,$

$19 = (8-6)\cdot 9+1,$

$20 = (8-6)\cdot(9+1) = \sqrt{16}\cdot\sqrt{9}+8,$

$21 = 19+8-6 = \sqrt{169}+8 = (8-1)(9-6) =$

$= 18+(9;6),$

$22 = \sqrt{196}+8 = 9+8+6-1 = (8+\sqrt{9})\cdot\sqrt{\sqrt{16}},$

$23 = (9+8+6)\cdot 1 = 8\cdot(9-6)-1,$

$24 = 1+9+8+6 = (16-8)\cdot\sqrt{9} =$

$= \sqrt{81}+6+9 = (6;9)\cdot[1;8] = 8\cdot(9-6)\cdot 1,$

$25 = 8\cdot(9-6)+1 = (8-\sqrt{9})(6-1),$

$26 = 19+6+\mathrm{sg}8 = \sqrt{9}\cdot 6+8\cdot 1,$

$27 = (18:6)\cdot 9 = 81:(9-6) =$

$= (81;6)9 = (8+1)(9-6),$

$28 = 89-61,$

$29 = 6\cdot 8-19 = (8-\sqrt{9})\cdot 6-1,$

$30 = (8-\sqrt{9})\cdot 6\cdot 1,$

$31 = 8\cdot(6-1)-9 = (8-\sqrt{9})\cdot 6+1,$

$32 = \sqrt{1+9+6}\cdot 8 = (\sqrt{\sqrt{16}})^{8-\sqrt{9}},$

$33 = 19+8+6 = 198:6 = [8;6]+[9;1],$

$34 = (9+8)\sqrt{\sqrt{16}},$

$35 = (8-\sqrt{9})(1+6) = \sqrt{16}\cdot 8+\sqrt{9},$

$36 = 6\cdot 9-18 = 6^{18:9} = (8+\sqrt{16})\sqrt{9} =$

$= \sqrt{9}\cdot 6+18,$

$37 = 9\cdot(6-1)-8,$

$38 = 6\cdot 8-9-1 = 19\cdot(8-6) = 19\cdot(8;6),$

$39 = 6\cdot 8-9\cdot 1,$

$40 = 6\cdot 8-9+1 = (6-1^9)\cdot 8 = \sqrt{19+6}\cdot 8,$

$41 = \sqrt{9}\cdot(6+8)-1,$

$42 = 6\cdot(8-1^9) = \sqrt{9}\cdot(6+8)\cdot 1,$

$43 = 91-6\cdot 8 = \sqrt{9}\cdot(6+8)+1,$

$44 = \sqrt{16}\cdot 9+8 = (8+\sqrt{9})\cdot\sqrt{16},$

$45 = 9\cdot 6-8-1,$

$46 = 6\cdot 9-8\cdot 1,$

$47 = 9\cdot 6-8+1 = 6\cdot 8-1^9,$

$48 = 6\cdot 8\cdot 1^9 = 6\cdot(9-1^8),$

$49 = 68-19 = 6\cdot 8+1^9,$

$50 = 6\cdot 8+\sqrt{9}-1,$

$51 = 69-18 = 6\cdot 8+\sqrt{9\cdot 1},$

$52 = 6\cdot 8+\sqrt{9}+1,$

$53 = 9\cdot(6-1)+8 = 6\cdot 9-1^8,$

$54 = 18\cdot(9-6) = \frac{6}{9}\cdot 81 = 6\cdot 9\cdot 1^8,$

$55 = 6\cdot 9+1^8,$

$56 = 8\cdot 9-16 = (16-9)\cdot 8 = \sqrt{16}^{\sqrt{9}}-8,$

$57 = 6\cdot 8+1\cdot 9 = (8-1)\cdot 9-6,$

$58 = 68-9-1,$

$59 = (68-9)\cdot 1,$

$60 = 68-9+1 = 69-\sqrt{81} = 6\cdot(9+1^8),$

$61 = (69-8)\cdot 1,$

$62 = 69-8+1 = 6\cdot 9+8\cdot 1 = 186:\sqrt{9},$

$63 = 9\cdot 6+8+1,$

$64 = (\log_9 81)^6 = 8^{9-6-1},$

$65 = 9\cdot 8-6-1,$

$66 = (19-8)\cdot 6 = 9\cdot 8-6\cdot 1,$

$67 = 86-19 = 9\cdot 8-6+1,$

$68 = 68\cdot 1^9 = (8+9)\sqrt{16},$

$69 = 9\cdot(8-1)+6,$

$70 = 8\cdot(9-1)+6,$

$71 = 8 \cdot 9 - 1^8 = \frac{6!}{9} - 8 - 1,$

$72 = 18 + 6 \cdot 9 = 8 \cdot 9 \cdot 1^8 = \frac{6!}{9} + 8 \cdot 1 = \sqrt{16}^{\sqrt{9}} + 8,$

$73 = 89 - 16 = 8 \cdot 9 + 1^8 = \sqrt{9}^{\sqrt{16}} - 8,$

$74 = 9 \cdot 8 + \sqrt{\sqrt{16}},$

$75 = \frac{8!}{6!} + 19 = 9 \cdot (8+1) - 6,$

$76 = 69 - 1 + 8,$

$77 = 69 + 8 \cdot 1,$

$78 = 69 + 8 + 1 = 9 \cdot 8 + 6 \cdot 1,$

$79 = 9 \cdot 8 + 6 + 1 = \frac{6!}{9} - 1^8,$

$80 = \frac{6!}{9} \cdot 1^8 = 9^{8-6} - 1,$

$81 = 9^{16:8} = 9^{8-6} \cdot 1 = \frac{6!}{9} + 1^8,$

$82 = 9^{8-6} + 1 = 89 - 6 - 1 = 98 - 16,$

$83 = (89 - 6) \cdot 1,$

$84 = 89 - 6 + 1,$

$85 = 89 - \sqrt{16} = (8+9)(6-1),$

$86 = 86 \cdot 1^9,$

$87 = 69 + 18 = 9 \cdot (8+1) + 6 = 96 - 8 - 1,$

$88 = 96 - 8 \cdot 1 = \frac{6!}{9} + 8 \cdot 1 = 9 \cdot 8 + 16,$

$89 = 96 - 8 + 1 = \sqrt{9}^{\sqrt{16}} + 8,$

$90 = 89 + 1^6,$

$91 = 98 - 6 - 1,$

$92 = 98 - 6 \cdot 1,$

$93 = 98 - 6 + 1,$

$94 = 86 + 9 - 1,$

$95 = 86 + 9 \cdot 1,$

$96 = 86 + 9 + 1 = \sqrt{16} \cdot \sqrt{9} \cdot 8,$

$97 = 98 - 11^6,$

$98 = 98 \cdot 1^6 = \frac{6!}{9} + 18,$

$99 = 98 + 1^6,$

$100 = 98 + \sqrt{\sqrt{16}}.$

DR. SCHARNITZKY VIKTOR
tanszékvezető főiskolai tanár
Könnyűipari Műszaki Főiskola, Budapest

Beszámoló a Hajós György Matematikai Tanulmányi Versenyről

Az 1985/86. tanévi, sorrendben a tizenkettedik Hajós György Matematikai Tanulmányi versenyt az Ybl Miklós Építőipari Műszaki Főiskola (Debrecen) rendezte 1986. március 21-én és 22-én. A versenyen 16 főiskola és főiskolai kar egy-egy négytagú csapata vett részt. A csapatversenyt az egyes csapatok három, a legtöbb pontot szerzett tagjának az összpontszáma döntötte el, az egyéni versenyben minden versenyző a saját elért pontszámával szerepelt.

A kitűzött feladatokat a Versenybizottság állította össze a versenyt megelőző napon az egyes főiskolák által javasolt feladatok közül. A Versenybizottság elnöke Dr. Scharnitzky Viktor főiskolai tanár volt. Az öt feladat helyes megoldásáért összesen 100 pontot lehetett kapni.

A kitűzött feladatok

1. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$x^2 - yz = 1; \quad y^2 - xz = 2; \quad z^2 - xy = 4.$$

2. Egy természetes számnak a 10-es és a 8-as számrendszerbeli alakja egyaránt olyan háromjegyű szám, amelyben a számjegyek összege 14. Írja fel a számot a tízes számrendszerben!

3. Az R sugarú gömbbe írjon olyan kúpot, amelynek alkotója ugyanakkora, mint alapkörének átmérője. A gömb középpontjától mekkora távolságra kell a kúp alaplapjával párhuzamos síkot felvenni, hogy a sík által a gömbből és a kúpból kimetszett körök területének a különbsége maximális legyen?

4. Határozza meg mindazokat a természetes számokat, amelyekre az

$$1!+2!+3!+\ldots+n!$$

összeg négyzetszám! ($n!=1\cdot 2\cdot 3\ldots n.$)

5. Határozza meg az

$$f(x)=\frac{2\cdot\ln^2 x+6\cdot\ln x+6}{\ln^2 x+4\cdot\ln x+5},\quad x>0$$

függvény értékkészletét!

A Versenybizottság *értékelésében* megállapította, hogy a verseny eredményes volt; minden feladatra érkezett helyes megoldás és a versenyzők több, mint egynegyede (17 fő) ért el 54 pontnál jobb teljesítményt.

A csapatverseny első három helyezettje

1. **Ybl Miklós Építőipari Műszaki Főiskola,** Budapest (224 pont).
2. **MN Kilián György Repülő Műszaki Főiskola,** Szolnok (221 pont).
3. **Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola,** Budapest (188 pont).

A győztes csapat őrzi a következő versenyig a Hajós György Matematikai Tanulmányi Verseny Vándorserlegét.

Az egyéni verseny első tíz helyezettje

1. **Le Van Hien** (MN Kilián György Repülő Műszaki Főiskola, Szolnok) 95 pont.
2. **Nguyen Quoc Hung** (MN Zalka Máté Katonai Műszaki Főiskola, Budapest) 93 pont.
3. **Hacsek Tamás** (Ybl Miklós Építőipari Műszaki Főiskola, Budapest) 87 pont.
4. **Gyuricza László** (Ybl Miklós Építőipari Műszaki Főiskola, Budapest) 83 pont.
5. **Filkó Attila** (MN Kilián György Repülő Műszaki Főiskola, Szolnok) 80 pont.
6. **Gulyás András** (Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola, Budapest) 75 pont.
7. **Domszky Zoltán** (Ybl Miklós Építőipari Műszaki Főiskola, Budapest) 74 pont.
8. **Toldi László** (NME Kohó és Fémipari Főiskolai Kar, Dunaújváros 69 pont.
9. **Sinka Márton** (Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola, Budapest) 65 pont.
10. **Seprenyi Andrea** (Könnyűipari Műszaki Főiskola, Budapest) 62 pont.

A Versenybizottság **Tarjáni István** (Közlekedési és Távközlési Műszaki Főiskola, Győr) versenyzőnek az első feladatra adott megoldását „A legötletesebb algebrai megoldás" címmel tüntette ki és külön oklevéllel jutalmazta, továbbá **Seprenyi Andrea** (Könnyűipari Műszaki Főiskola, Budapest) versenyzőt a legjobb női versenyző címen külön jutalomban részesítette.

Az 1986/87 tanévi verseny megrendezését az Ybl Miklós Építőipari Műszaki Főskola (Budapest) vállalta el.

DR. VARECZA ÁRPÁD
tanszékvezető főiskolai tanár
Bessenyei György Tanárképző Főiskola, Nyíregyháza

Egy sorbaállási problémáról

Az „Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából" (Tankönyvkiadó, Budapest, 1984) című példatár utolsó feladata (4193) a következő:

„Egy pénztárnál 2n számú vásárló várakozik. Közülük n-nek 10 forintos, a többinek 5 forintos érméje van. A pénztárban nyitáskor nem volt pénz. Egy jegy ára 5 forint. Mi annak a valószínűsége, hogy egy vásárló se várjon a visszajáró pénzre?"

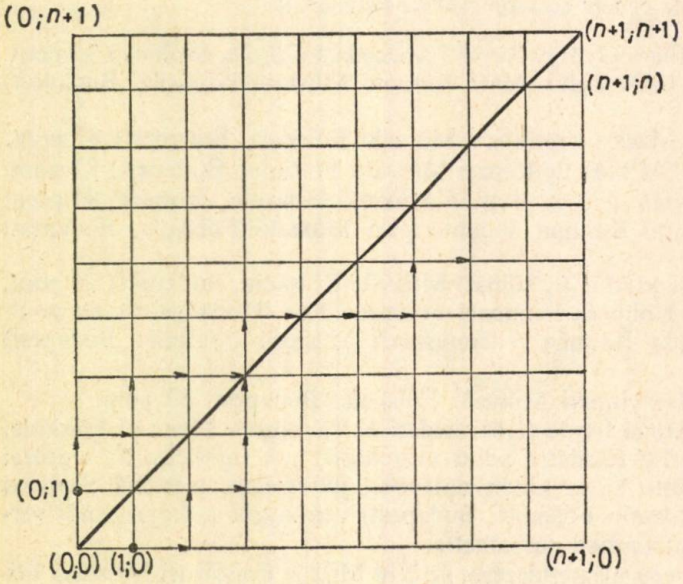
(A feladat szerepel [1]-ben (1. fejezet 33) és [2]-ben (82—91 oldal is.)

Mivel a feladat megoldásának gondolatmenete nagyon sok probléma megoldásánál használható és szakköri feldolgozásra is ajánlható, ezért foglalkozunk vele dolgozatunkban. A lehetséges sorrendek számának meghatározása nem jelent problémát, mivel könnyen látható, hogy egy ismétléses permutációról van szó, ahol két fajta elemünk van és mindegyikből n darab. Ezért a lehetséges sorrendek száma:

$$\frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}.$$

Kicsit több meggondolást igényel a kedvező esetek számának a meghatározása! Mielőtt erre rátérnénk — az egyszerűbb beszédmód kedvéért — a feladatot 5 és 10 Ft-osok helyett 0,1 számjegyekre fogalmazzuk meg.

„Adott n darab 0 és n darab 1-es számjegy és ezen számjegyekkel 2n hosszúságú sorozatokat készítünk. Egy sorozatot „jó sorozatnak" nevezünk, ha a sorozat bármely eleme előtt legalább annyi 0 jegy van, mint 1-es. Határozzuk meg a jó sorozatok számát!"



1. ábra

Mivel a rossz sorozatok számát könnyebben meghatározhatjuk és ezek ismeretében a jó sorozatok számát megkaphatjuk, ha kivonjuk a lehetséges sorozatok számából, ezért először a rossz sorozatok számának meghatározásával foglalkozunk.

Tekintsünk egy $(n+1)\times n+1)$-es négyzetrácsot (1. ábra)!

Minden 0, 1 sorozathoz hozzárendelünk egy- az (1; 0) pontból induló poligont a következő képpen: ha 0 jegy következik, akkor jobbra lépünk egy egységet; ha 1-es jegy következik, akkor fölfelé lépünk egy egységet. Minden poligon az $(n+1; n)$ pontban fejeződik be mivel n-szer lépünk jobbra és n-szer felfelé. Könnyen látható, hogy minden rossz sorozatnak megfelelő poligon tartalmaz átlón levő pontot. Minden rossz sorozatnál tekintsük az első ilyen pontot! Legyen — mondjuk — $(s; s)$. Tükrözzük a poligon $(s; s)$ pontig terjedő részét az átlóra. Így egy olyan poligonhoz jutunk, amely a (0; 1) pontból indul és az $(n+1; n)$ pontban fejeződik be. Az is könnyen látható, hogy így minden rossz sorozathoz egyértelműen rendeltünk egy a (0; 1) pontból induló és az $(n+1; n)$ pontban végződő poligont. Ezen poligonok $n+1$ jobbra lépést és $n-1$ felfelé lépést tartalmaznak, s ezért a számuk

$$\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \binom{2n}{n+1}.$$

Ezek szerint a jó sorrendeknek a száma

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Ha azon sorozatok számára vagyunk kíváncsiak, amelyekben bármely elem előtt több 0 jegy van mint 1-es, akkor a következő képpen járhatunk el:

Tekintsünk egy jó sorozatot, azaz olyat, amelyben bármely elem előtt több 0 jegy van, mint egyes. Ezen sorozat nyilván 0-val kezdődik és 1-essel fejeződik be. Töröljük az első és utolsó jegyet! Így egy $n-10$ jegyet és $n-1$ 1 jegyet tartalmazó olyan sorozathoz jutunk, amelynek bármely eleme előtt legalább annyi 0 jegy van mint 1-es. Ezeknek a száma az előzőek szerint

$$\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Ezt úgy is mondhatjuk, hogy azon sorozatok száma, amelyekben bármely elem előtt *legalább eggyel több 0 jegy van, mint 1-es*

$$\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Ebből a megfogalmazásból kézenfekvően adódik a következő általánosítás:

Mennyi azon sorrendeknek a száma, amelyekben bármely elem előtt legalább k-val több 0 jegy áll, mint 1-es $(1 \leqq k < n)$?

A megoldás a $k=1$ esethez hasonlóan történhet.

Tekintsünk egy tetszőleges jó sorozatot! A sorozat nyilván legalább $k+1$ 0 jeggyel kezdődik és $k+1$ 1 jeggyel végződik. Töröljük az első k darab 0 jegyet és az utolsó k darab 1-est! Könnyen látható, hogy így olyan $n-k$ 0 jegyből és $n-k$ 1-esből álló sorozathoz jutunk, amelyben bármely elem előtt legalább annyi 0 jegy van, mint 1-es. Ezeknek a száma viszont

$$\frac{1}{n+1-k}\binom{2(n-k)}{n-k}.$$

Az eddigiekben feltettük, hogy a 0 és 1 jegyek száma megegyezik. A következőkben olyan 0, 1 sorozatokkal foglalkozunk, amelyekben a 0 és 1-es jegyek száma különböző.

Tegyük fel, hogy van n darab 0 *és m darab* 1*-es. Kérdés, hogy ezen számjegyekkel mennyi olyan sorozatot tudunk készíteni, amelyekben bármely elem előtt legalább annyi* 0 *jegy szerepel, mint* 1*-es?*

Ha $n<m$, akkor a feltételt kielégítő sorozatok száma nyilván 0.

Tegyük fel tahát, hogy $m \leqq n$.

A feltételt kielégítő sorozatokat az $n=m$ esethez hasonlóan számlálhatjuk össze.

Most is úgy járunk el, hogy a „rossz" sorozatok számát kivonjuk a lehetséges sorozatok számából.

A lehetséges sorozatok száma nyilván.

$$\frac{(n+m)!}{n!m!} = \binom{n+m}{n}.$$

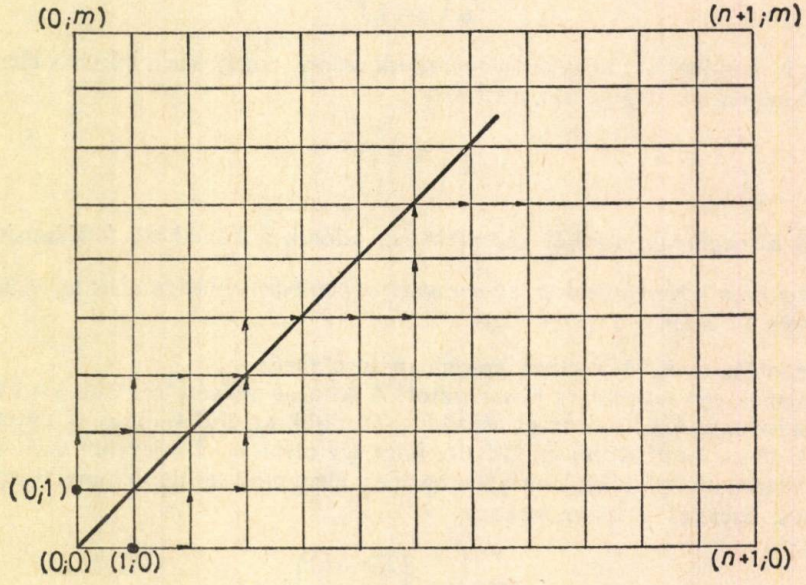
Meghatározzuk a rossz sorrendek számát.

Minden rossz sorrendhez — az $n=m$ esetben látottakhoz hasonlóan — hozzárendelünk kölcsönösen egyértelműen egy a (0; 1) pontból induló és az $(n+1; m)$ pontban végződő poligont (2. ábra). Mivel a poligon $n+1$ jobbra lépésből és $m-1$ felfelé lépésből áll, ezért a számuk

$$\frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!} = \binom{n+m}{n+1}.$$

Ezek szerint a jó sorrendek száma

$$\binom{m+n}{n} - \binom{n+m}{n+1} = \binom{n+m}{n}\left(1 - \frac{m}{n+1}\right) = \frac{n-m+1}{n+1}\binom{n+m}{n}.$$



2. ábra

Elképzelhető, hogy a pénztár nyitásakor a pénztárban van valamennyi 5 forintos. Kérdés, hogy ilyen esetben mennyi a jó sorrendeknek a száma?

Tegyük fel, hogy nyitáskor k ötforintos van a pénztárban. Ez azt jelenti, hogy minden sorozat legalább k 0 jeggyel kezdődik.

Az nyilvánvaló, hogy ha $k \geqq m$, akkor minden sorozat kielégíti a feltételt, s ezért a számuk $\binom{n+m}{n}$, és ha $k+n<m$, akkor minden sorozat rossz, azaz a jó sorozatok száma 0.

Tegyük fel tehát, hogy

$$k < m \leqq n+k$$

egyenlőtlenség sorozat teljesül.

Most is a rossz sorrendek számát határozzuk meg először. Minden sorozat k 0 jeggyel kezdődik és utána — valamilyen sorrendben — szerepel n darab 0, m darab 1-es. Az előzőekben látottakhoz hasonlóan ebben az esetben is megfeleltethetünk minden sorozatnak egy az $(1;0)$ pontból induló poligont, amelynél az első k lépés jobbra történik és — mivel $n+k$ lépés lesz jobbra, m lépés felfelé — az $(n+1+k; m)$ pontban fejeződik be. Ha egy sorozat rossz, akkor a megfelelő poligon tartalma $(s; s)$ típusú pontot. Tükrözzük az első $(s; s)$ típusú pontig terjedő részét a poligonnak a (0; 0), (m, m) pontokon átmenő egyenesre! Így egy olyan poligonhoz jutunk, amely a (0; 1) pontból indul, a $(k+n+1; m)$ pontban végződik és az első k lépés felfelé történik. Mivel a megfeleltetés bijektív, ezért a rossz sorrendek száma megegyezik a $(0; k+1)$ pontból induló és $(n+k+1; m)$ pontban végződő poligonok számával. Ezen poligonok $n+k+1$ jobbra lépést és $m-k-1$ felfelé lépést tartalmaznak (az első k felfelélépéstől eltekintve), ezért a rossz sorrendek száma $\binom{n+m}{n+k+1}$, és a jó sorrendek száma

$$\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{n+k+1}.$$

Ha n darab 0 jegy és m darab 1-es jegy adott, akkor is kérdezhetjük — az előzőekben látottakhoz hasonlóan — azt, hogy mennyi azon sorozatok száma, amelyekben minden elem előtt legalább k-val több 0 jegy van mint 1-es?

Tekintsünk egy, a feltételt kielégítő sorozatot! Ez a sorozat legalább $k+1$ 0 jeggyel kezdődik. Töröljük a sorozat első k jegyét! A megmaradó sorozat $n-k$ 0 jegyet és m 1-est tartalmaz, és minden elem előtt legalább annyi 0 jegy van, mint 1-es. Ezeknek a száma — az előzőek szerint —

$$\frac{n-k+m-1}{n-k+1}\binom{m+n-k}{m}.$$

A következőkben foglalkozunk még egy az eddigiekből könnyen adódó *rekurzív sorozattal.*

Tekintsük a kiindulási problémát!

Mint láttuk n darab 0 jeggyel és n darab 1-es jeggyel $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ olyan $2n$ hosszúságú sorozat készíthető, amelyekben bármely elem előtt legalább annyi 0 jegy van mint 1-es.

Osztályokba soroljuk ezeket a sorozatokat! A H_s osztályba kerüljenek azok a sorozatok, amelyekben a $2s$-edik az első olyan eleme a sorozatnak, hogy az első $2s$ helyen ugyanannyi 0 jegy van mint 1-es ($s=1, 2, \ldots, n$).
A $2s$-edik elem előtt levő sorozat tehát olyan, hogy bármely eleme előtt több 0 jegy van mint 1-es. Ezeknek a száma az előzőek szerint

$$\frac{1}{s}\binom{2s-2}{s-1}.$$

A $2s$-edik elem utáni része a sorozatnak olyan, hogy minden eleme előtt legalább annyi 0 jegy szerepel, mint 1-es, ezért ezeknek a száma

$$\frac{1}{n-s+1}\binom{2n-2s}{n-2}.$$

Ezek szerint a H_s osztály számossága:

$$|H_s| = \frac{1}{s}\binom{2s-2}{s-1}\frac{1}{n-s+1}\binom{2n-2s}{n-s}.$$

Ezt felhasználva

$$\sum_{s=1}^{n}|H_s| = \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s(n-s+1)}\binom{2s-2}{s-1}\binom{2n-2s}{n-s} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Legyen

$$T_s = \frac{1}{s+1}\binom{2s}{s}.$$

Ezt felhasználva

$$T_n = T_0T_{n-1}+T_1T_{n-2}+\ldots+T_{n-2}T_1+T_{n-1}T_0$$

rekurzív sorozathoz jutunk.
A kapott rekurzív sorozatra vezet számos feladat megoldása.
Például:

1. Hányféleképpen szorozhatunk össze n, adott sorrendbe felírt számot ([3], [2] 157. oldal)!
2. Hányféleképpen értelmezhető az

$$a_1 : a_2 : a_3 \ldots : a_n$$

osztássorozat ([2] 158., 159. oldal)?
3. Hányféleképpen tudjuk összekötni egy körbe írt szabályos $2n$ szög csúcsait úgy, hogy a kapott szakaszok ne messék egymást ([2] 159. oldal)?
4. Hányféleképpen lehet egy konvex $n+2$ szöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani ([2] 160. oldal)?

IRODALOM

[1] LOVÁSZ LÁSZLÓ: *Combinatorial Problems and Exercises*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979.
[2] N. J. Vilenkin: *Kombinatorika* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971.
[3] VARECZA ÁRPÁD: *Egy kombinatorikai problémáról*. A Matematika Tanítása (1985) XXXII., 5., 150—152. oldal.

ÚJ KÖNYVEK

ANDRÁSFAI BÉLA: *Ismerkedés a gráfelmélettel.* (3. kiadás) Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 237 oldal, 46, — Ft.

ARATÓ PÉTER: *Logikai rendszerek tervezése.* Budapest 1985, Tankönyvkiadó, 475 oldal, 52, — Ft.

BÁLINTNÉ SZENDREI MÁRIA—CZÉDLI GÁBOR—SZENDREI ÁGNES: *Absztrakt algebrai feladatok* (Egyetemi segédkönyv), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 504 oldal, Ft.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER (szerk.): *Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához.* (4. kiadás) Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 424 oldal, 50, — Ft.

COPI, I. M.—GOULD, J. A.: *Kortárs-tanulmányok a logikaelmélet kérdéseiről,* Budapest 1985, Gondolat, 606 oldal, 72, — Ft.

CSÁKÁNYI ANTAL—VAJDA FERENC: *Játékok számítógéppel.* (2. kiadás) Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 284 oldal, 57, — Ft.

CSÁSZÁR, Á. (Editor): *Topology, Theory and Applications,* Colloquia Mathematica Societatis János Bólyai 41, Budapest—Amsterdam, 1985, János Bólyai Mathematical Society and North—Holland Publishing Company, 728 p., 660, —Ft.

DEMETROVICS, J.—KATONA, G.—SALOMAA, A. (Editors): *Algebra, Combinatorics and Logics in Computer Science,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 42, Budapest—Amsterdam, 1985, János Bolyai Mathematical Society and North—Holland Publishing Company, 887 p., 800, — Ft.

DUSZA ÁRPÁD—VARGA ANTAL: *A BASIC nyelvű programozás ábécéje,* Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 171 oldal, 66, — Ft.

HENRICI PETER: *Numerikus analízis,* Budapest 1985, Műszaki Könyvkiadó, 370 oldal, 126, — Ft.

JAGLOM, I. M.: *Galilei relativitás elve és egy nem-euklideszi geometria,* Budapest 1985, Gondolat, 458 oldal, 63, — Ft.

KIRILLOV, A. A.: *Representation of Lie Groups and Lie Algebras,* Budapest, 1985, Akadémiai Kiadó, 225 oldal, 280, — Ft.

KIRILLOV, A. A.—GIVISLANI, A. D.: *Feladatok a funkcionálanalízis köréből.* (Egyetemi segédkönyv) Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 391 oldal, 51, — Ft.

LATKA FRANTISEK: *Matematikai képletgyűjtemény.* (4. bővített kiadás) Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 150 oldal, 19, — Ft.

LOVÁSZ, L.—SZEMERÉDI, E. (Editors): *Theory of Algorithms,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 44, Budapest—Amsterdam, 1985, János Bolyai Mathematical Society and North—Holland Publishing Company, 430 p., 400, — Ft.

LŐCS GYULA—VIGASSY JÓZSEF: *A FORTRAN programozási nyelv.* (6. bővített kiadás) Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 433 oldal, 77, — Ft.

LŐRINCZ PÁL: *Ábrázoló geometria.* (Egyetemi tankönyv, 3. kiadás) Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 323 oldal, 53, — Ft.

RÁBAI IMRE: *Készüljünk együtt matematikából* Budapest 1985, Gondolat, 388 oldal, 59, — Ft.

ROHOVSZKI RUDOLF: *Matematika, középiskolára előkészítő tanfolyam anyaga.* (11. átdolgozott kiadás) Budapest, 1985, 160 oldal, 24, — Ft.

SZABÓ, L.—SZEDREI, Á. (Editors): *Lectures in Universal Algebra,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 43, Budapest—Amsterdam, 1985, János Bolyai Mathematical Society and North—Holland Puplishing Company, 655 p., 600, — Ft.

SZERÉNYI TIBOR: *Analízis* (Tanárképző főiskolai tankönyv), (3. kiadás), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 578 oldal, 61, — Ft.

Dr. Scharnitzky Viktor

Szenior konferencia

A Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetsége Szeniorok Tanácsa 1986. június 20-án *Szenior konferenciát* rendezett Budapesten az MTESZ székházában (V. ker., Kossuth Lajos tér 6—8.) a következő programmal:

10 órakor:

Plenáris ülés.

Elnöki megnyitó:

Dr. Osztrovszki György akadémikus.

Dr. Tóth János, az MTESZ főtitkára tartott előadást a szenior műszaki, gazdasági, agrár- és természettudományi értelmiség helyzetéről.

Szekcióülések (kb. 12,50-től)

I. szekció
A szeniorok tudományos tevékenysége.
Elnök: Dr. Kovács István akadémikus.
Titkár: Dr. Vermes Lászlóné.

II. szekció
A szeniorok társadalmi beilleszkedése, társadalmi tevékenységük.
Elnök: Dr. Soós Gábor ny. államtitkár, az MTESZ társelnöke.
Titkár: Vég László.

III. szekció
A szeniorok életszínvonala és szociális problémái.
Elnök: Dr. Bartos István, az Országos Társadalombiztosítási Főigazgatóság főigazgatója.
Titkár: Szánthó Sándor.

IV. szekció
A szeniorok foglalkoztatása.
Elnök: Dr. Polonkai János, az SZVT főtitkára.
Titkár: Kuti Lajos, a GTE alelnöke.

V. szekció
Az aranydiplomás mérnökök helyzete.
Elnök: Merényi János ny. egyetemi docens.
Titkár: Mérei István.

15 órakor:
Záró plenáris ülés.

A Szenior konferencia alapgondolata az volt, hogy az alkotóképességet nem lehet nyugdíjazni.

A képesség az alkotó munkára — normális körülmények között — nem tűnik el egyik napról a másikra. Aki ma még eredményesen dolgozik, az holnap nem válik feltétlenül használhatatlan tagjává a társadalomnak.

A nyugdíjazás előtt álló, valamint az új és a régebbi nyugdíjas mérnökök, közgazdászok, fizikusok, vegyészek, matematikusok, vagyis a termeléshez közel álló, azt megalapozó témák valamelyikében gazdag tapasztalatokat szerzett idős korú szakemberek problémáit az MTESZ keretében a *Szeniorok Tanácsa* gondozza.

Becslésszerű, de meglehetősen megbízhatóknak tekinthető adataik szerint az országban 16—18 ezer nyugdíjas „szenior" volt vagy ma is tagja valamelyik MTESZ tagegyesületnek.

Sokan közülük olyan gazdag ismeretanyagot birtokolnak ma is, amelynek értékesítéséről nem lenne szabad lemondania az országnak, a népgazdaságnak. Sajnos, azonban csak körülbelül 15 százalékuk tart fenn szoros, mintegy 25—30 százalékuk meglehetősen laza kapcsolatot a szakképzettségének megfelelő tagegyesülettel, körülbelül 50 százalékuk tudása és tapasztalata azonban már végleg elveszett a népgazdaság számára.

A Szeniorok Tanácsa a június 20-án megrendezett konferencia tanácskozásainak alapján javaslatokat kíván terjeszteni az MTESZ őszi küldöttközgyűlése elé, hogy azok megvitatás után eljuthassanak az illetékes kormány- és pártszervekhez.

Ára: 7,— Ft